פתרון8:

3.1 תרגיל. הוכח שלכל וקטור $v\neq 0$, הוקטור $\tilde{v}=\frac{1}{\|v\|}\cdot v$ הוא נורמלי.

צ"ל $\left\langle \frac{v}{\|v\|},\frac{v}{\|v\|}\right\rangle =1$

$$\left\langle \frac{v}{\|v\|},\frac{v}{\|v\|}\right\rangle = \frac{1}{\|v\|^2}\langle v,v\rangle = \frac{1}{\|v\|^2}\|v\|^2 = 1$$

4.1 תרגיל. בדוק אילו מזוגות הוקטורים הבאים מאונכים זה לזה:

א. $(0,1,0,2),(100,0,-999,0)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^4$.

ב. $(1,i),(1,i)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{C}^2$.

ג. $(1,i),(1,-i)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{C}^2$.

א.

$$\left\langle \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}100 & 0 & -999 & 0\end{pmatrix}\right\rangle = 0+0+0+0=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}100 & 0 & -999 & 0\end{pmatrix}$$

ב.

$$\left\langle \begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix}\right\rangle = 1\cdot\bar{1}+i\cdot\bar{i}=1+1=2\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix}\not\perp\begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix}$$

ג.

$$\left\langle \begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix}\right\rangle = 1\cdot\bar{1}+i\cdot\overline{(-i)}=1-1=0\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix}$$

4.7 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי ממימד n, ותהא $B\subseteq V$. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. B בסיס אורתונורמלי.

ב.B קב' אורתונ' מגודל n

<u>B בסיס אורתונ'</u> $\Leftrightarrow$ B בסיס וגם קב' אורתונ'

$\Leftrightarrow$ B קב' של n וקטורים בת"ל וגם קב' אורתונ' $\underset{\downarrow}{\Longleftrightarrow}$ <u>B קב' של n וקטורים וגם קב' אורתונ'</u>

(כי B אורתונ' אז B בפרט אורתוג' וכפי שנלמד בכיתה זה כבר גורר שהיא קב' בת"ל ולכן התנאי כלול בתוכה ואין צורך לציין אותו שוב)

4.9 תרגיל. הגדר (ישירות) על $V=\mathbb{R}_n[x]$ מכפלה פנימית, כך ש $\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$ יהווה בסיס אורתונורמלי לגבי מכפלה זאת.

$$\left\langle \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$\downarrow$$

אם החזקה של אחד מהם נמוכה יותר אז יתר המקדמים עד n הם פשוט 0

נראה שזו מ"פ:

$$1.\left\langle \alpha\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \beta\sum_{i=0}^{n} c_i x^i, \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n} \alpha a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} \beta c_i x^i, \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n} (\alpha a_i + \beta c_i) x^i, \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i + \beta c_i) b_i = \alpha\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \beta\sum_{i=1}^{n} c_i b_i = \alpha\left\langle \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle + \beta\left\langle \sum_{i=0}^{n} c_i x^i, \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle$$

$$2.\left\langle \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = \left\langle \sum_{i=0}^{n} b_i x^i, \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right\rangle$$

$$3.\left\langle \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq 0. \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \quad a_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0.$$

כמו כן נראה אורתונורמליות:

$$\forall i \neq j \qquad \left\langle x^i, x^j \right\rangle = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0$$
$$\forall i \qquad \left\langle x^i, x^i \right\rangle = 1\cdot 1 = 1$$

4.16 תרגיל. א. הוכח שלכל מרחב וקטורי ממימד סופי יש בסיס אורתונורמלי.

ב. הוכח שניתן להשלים כל קבוצה אורתונורמלית לבסיס אורתונורמלי של המרחב.

5.4 תרגיל. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות, כאשר U, W תת-מרחבים של מרחב מכפלה פנימית V:

א. $(U+W)^{\perp}=U^{\perp}+W^{\perp}$.

ב. $(U+W)^{\perp}=U^{\perp}\cap W^{\perp}$.

ג. $(U+W)^{\perp}=(U\cap W)^{\perp}$.

א. הפרכה:

$$\left(\{0\}+V\right)^{\perp}=V^{\perp}$$

$$\{0\}^{\perp}+V^{\perp}=V+\{0\}=V$$

ב. הוכחה:

$$\supseteq:\ v\in U^{\perp}\cap W^{\perp}\Rightarrow v\in U^{\perp}\wedge v\in W^{\perp}\Rightarrow\begin{cases}\forall u\in U & \langle v,u\rangle=0\\ \forall w\in W & \langle v,w\rangle=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\forall u+w\in U+W\qquad\langle v,u+w\rangle=\langle v,u\rangle+\langle v,w\rangle=0\Rightarrow v\in\left(U+W\right)^{\perp}$$

$$\subseteq:\ v\in\left(U+W\right)^{\perp}\Rightarrow\forall u+w\in U+W\qquad\langle v,u+w\rangle=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{בפרט עבור } w=0\in W:\\ \quad\langle v,u+w\rangle=\langle v,u\rangle=0\Rightarrow\forall u\in U\qquad\langle v,u\rangle=0\Rightarrow v\in U^{\perp}\\ \\ \text{ובפרט עבור } u=0\in U:\\ \quad\langle v,u+w\rangle=\langle v,w\rangle=0\Rightarrow\forall w\in W\qquad\langle v,w\rangle=0\Rightarrow v\in W^{\perp}\end{array}\right\}\Rightarrow v\in U^{\perp}\cap W^{\perp}$$

ג. הפרכה:

$$\left(\{0\}+V\right)^{\perp}=V^{\perp}$$

$$\left(\{0\}\cap V\right)^{\perp}=\{0\}^{\perp}=V$$

5.7 תרגיל. תהא $S=\{v_1,\dots,v_k\}$ קבוצה אורתונורמלית ב V. הוכח שלכל $v\in V$ מתקיים: $.v-\sum_{i=1}^{k}\langle v,v_i\rangle v_i\in S^{\perp}$

$$\forall v_j\in S\ \left\langle v-\sum_{i=1}^{k}\langle v,v_i\rangle v_i,v_j\right\rangle=\left\langle v,v_j\right\rangle-\sum_{i=1}^{k}\left\langle v,v_i\right\rangle\left\langle v_i,v_j\right\rangle \underset{\langle v_i,v_j\rangle=\begin{cases}0,i\neq j\\1,i=j\end{cases}}{=} \left\langle v,v_j\right\rangle-\left\langle v,v_i\right\rangle(0+\dots+0+\underset{\substack{\downarrow\\ when\quad i=j}}{1}+0+\dots+0)=$$

$$\left\langle v,v_j\right\rangle-\left\langle v,v_j\right\rangle=0\Rightarrow v-\sum_{i=1}^{k}\left\langle v,v_i\right\rangle v_i\in S^{\perp}$$

5.8 תרגיל. תהא $S=\{(1,-1,1,-1)\}\subseteq\mathbb{R}^4$ (עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית). מצא בסיס אורתונורמלי ל $S^{\perp}$.

$$S^{\perp}=\left\{\vec{v}=(a,b,c,d)\in R^4:(a,b,c,d)(1,-1,1,-1)=0\right\}=\left\{\vec{v}=(a,b,c,d)\in R^4:a-b+c-d=0\right\}=$$

$$\left\{\vec{v}=(a,b,c,d)\in R^4:a+c=b+d\right\}=\left\{(a,b,c,a+c-b):a,b,c\in R\right\}$$

ברור שמרחב זה הוא ממימד 3 כנדרש, נחפש את הבסיס עבורו מתוך הבסיס הסטנדרטי. כלומר, נבדוק לאן $(a,b,c,a+c-b)$ שולח כל e_i:

$$e_1\to(1,0,0,1+0-0)=(1,0,0,1)=b_1$$
$$e_2\to(0,1,0,0+0-1)=(0,1,0,-1)=b_2$$
$$e_3\to(0,0,1,0+1-0)=(0,0,1,1)=b_3$$

ואכן

$$\forall(a,b,c,a+c-b)\in S^{\perp}\quad (a,b,c,a+c-b)=a\cdot b_1+b\cdot b_2+c\cdot b_3\Rightarrow span$$

$$\left.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\square\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\square\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\square\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\text{independent}\right\}basis$$

$$\forall i=1,2,3\quad b_i\cdot(1,-1,1,-1)=0\Rightarrow sp\{b_i\}_{b=1}^{3}=S^{\perp}$$

מתהליך גרם שמידט נהפוך את הבסיס לאורתוג':

$$b_1'=b_1=(1,0,0,1)$$

$$b_2'=b_2-\frac{\langle b_2,b_1'\rangle}{\|b_1'\|^2}b_1'=\left(\frac{1}{2},1,0,-\frac{1}{2}\right)$$

$$b_3'=b_3-\frac{\langle b_3,b_1'\rangle}{\|b_1'\|^2}b_1'-\frac{\langle b_3,b_2'\rangle}{\|b_2'\|^2}b_2'=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1,\frac{1}{3}\right)$$

(בידקו אורתוג' ואל תשכחו לנרמל)

5.15 תרגיל. הוכח או הפרך את הטענה הבאה (זה רעיון של דני): יהא V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $U,W\subseteq V$, כך ש $U\oplus W=V$. אזי $U^{\perp}=W$.

בוודאי שהפרכה:

$$V=R^2$$
$$U=\{y=0\}$$
$$W=\{y=x\}$$
$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}+:\ \forall(x,y)\in R^2\qquad (x,y)=\underbrace{(x-y,0)}_{\in U}+\underbrace{(y,y)}_{\in W}\\ \cap:\ if\qquad (x,y)\in U\cap W\Rightarrow y=0\wedge x=y\Rightarrow(x,y)=0\Rightarrow U\cap W=\{0\}\end{array}\right\}\Rightarrow U\oplus W=V$$

$$U^{\perp}=\{x=0\}\neq W$$

1. נתון: $S=\left\{\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}-1\\4\\1\end{bmatrix},\mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}\right\}$

א. בדוק ש S קבוצה ניצבת ושהיא בסיס ל- R^3.

ב. בטאו את הווקטור $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}8\\-4\\-3\end{bmatrix}$ כצירוף ליניארי של הוקטורים ב- S.

2. הטילו את הווקטור $\mathbf{b}$ על הישר דרך $\mathbf{a}$ לקבל ווקטור ההיטל $\mathbf{p}$. בדקו ש- $\mathbf{e}=\mathbf{p}-\mathbf{b}$ הוא ניצב ל- $\mathbf{a}$.

א. $\mathbf{a}=(1,2,2),\mathbf{b}=(1,1,1)$ ב. $\mathbf{a}=(1,2,1,2),\mathbf{b}=(1,-2,3,-4)$.

3. העביר את הקבוצה $\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\-3\\3\end{bmatrix}\right\}$ לבסיס ניצב של $\mathbb{R}^3$ בשימוש השיטה שהצגנו בסוף השיעור (השיטה נקראת "גרם-שמידט").

4. העבר את הקבוצה $S=\left\{\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ לקבוצה ניצבת T ב $\mathbb{R}^3$ כך ש $\operatorname{Span}S=\operatorname{Span}T$. כאן $\operatorname{Span}S=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$. מה הצורה של $\operatorname{Span}S$, הפורש של הווקטורים. בשימוש הנוסחאות מהכיתה מצא c_1,c_2 כך ש $c_1\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\17\\17\end{bmatrix}$.

<u>פיתרונות 1-4:</u>

1)א.

$$\text{קב' אורתוגונלית} \Leftarrow \begin{cases} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix} = -1+0+1=0 \\ \begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = -2+4-2=0\,S \\ \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 2+0-2=0 \end{cases}$$

S קב' בת"ל של 3 וקטורים ב $\Re^3$

ובסה"כ S בסיס אורתוגונלי ל $\Re^3$

ב.

לפי: $y = \frac{yu_1}{u_1^2}u_1 + \frac{yu_2}{u_2^2}u_2 + \frac{yu_3}{u_3^2}u_3$

$$\begin{pmatrix}8\\-4\\-3\end{pmatrix} = 2\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - 1\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

(2

$$proj(u,v) = \frac{u \cdot v}{|v|^2}\,v$$

א.

$$proj(b,a)=\frac{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix}^2}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{9}\\\frac{10}{9}\\\frac{10}{9}\end{pmatrix}$$

$$e=p-b=\begin{pmatrix}\frac{5}{9}\\\frac{10}{9}\\\frac{10}{9}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\\frac{1}{9}\\\frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

$$\text{ניצבים}\Leftarrow <a,e>=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\\frac{1}{9}\\\frac{1}{9}\end{pmatrix}=-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=0$$

ב.

$$proj(b,a)=\frac{\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}^2}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\-\frac{8}{5}\\-\frac{4}{5}\\-\frac{8}{5}\end{pmatrix}$$

$$e=p-b=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\-1\frac{3}{5}\\-\frac{4}{5}\\-1\frac{3}{5}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\-3\frac{4}{5}\\2\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

$$\text{ניצבים}\Leftarrow <a,e>=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\-3\frac{4}{5}\\2\frac{2}{5}\end{pmatrix}=-1\frac{4}{5}+\frac{4}{5}-3\frac{4}{5}+4\frac{4}{5}=0$$

(3

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{x}_2-\mathrm{pr}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_2-\frac{\mathbf{x}_2^T\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{v}_{k+1}=\mathbf{x}_{k+1}-\mathrm{pr}_{\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{k-1}\}}\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_{k+1}-\frac{\mathbf{x}_{k+1}^T\mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k^T\mathbf{v}_k}\mathbf{v}_k\ \ldots-\frac{\mathbf{x}_{k+1}^T\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$$

לכן:

$$
\begin{cases}
v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2ex]
v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \dfrac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \dfrac{2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\[2ex]
v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \dfrac{\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \dfrac{\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

נבדוק אורתוגונליות:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

(4

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathrm{pr}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2^T\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$$

לכן:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

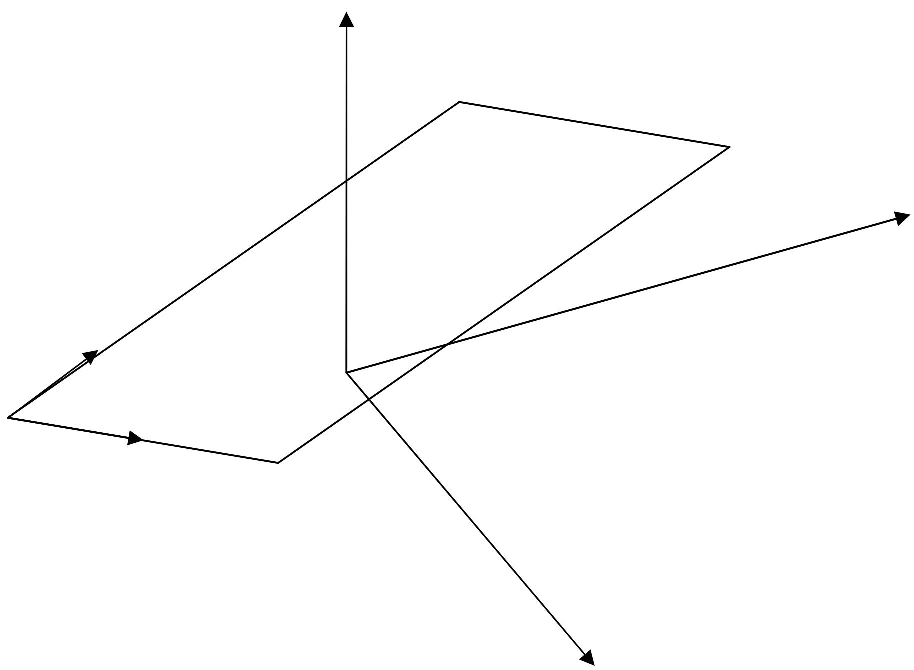
$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^2}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{25} \\ \frac{4}{25} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{22}{25} \\ \frac{21}{25} \\ -1\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

נבדוק אורתוגונליות:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{22}{25} \\ \frac{21}{25} \\ -1\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{66+84-150}{25} = 0$$

$$\underline{T = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{22}{25} \\ \frac{21}{25} \\ -1\frac{1}{5} \end{pmatrix} \right\}}$$

המרחב spanS נפרש ע"י שני וקטורים בת"ל ב- $\Re^3$ לכן צורתו <u>מישור</u> ב- $\Re^3$:



(הציור להמחשה בלבד ואיננו מתחשב בכיווני הוקטורים הפורשים)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 15 \\ 4 & 1 & 17 \\ 5 & -1 & 17 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 4 & 1 & 17 \\ 5 & -1 & 17 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 0 & -1/3 & -3 \\ 0 & -2\frac{2}{3} & -8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 0 & -1/3 & -3 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$\begin{pmatrix} 15 \\ 17 \\ 17 \end{pmatrix}$ איננו תלוי לנארית בוקטורים אלו,כלומר הוא איננו שייך למישור הנפרש על ידם.

דוגמא למציאת הצרוף הלנארי עבור וקטור שכן שייך:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 13 \\ 5 & -1 & 32 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 8/3 \\ 0 & -1/3 & 2\frac{1}{3} \\ 0 & -2\frac{2}{3} & 18\frac{2}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 8/3 \\ 0 & -1/3 & 2\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1/3 & 2\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$c_1 = 5, c_2 = -7$$

או,ע"י הנוסחאות מהכיתה(הנכונות לבסיס הניצב!):

$$c_1' = \frac{\begin{pmatrix} 8 & 13 & 32 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}} = \frac{118}{25}$$

$$c_2' = \frac{\begin{pmatrix} 8 & 13 & 32 \end{pmatrix}\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 22 \\ 21 \\ -30 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \frac{22}{25} & \frac{21}{25} & -\frac{30}{25} \end{pmatrix}^2} = -\frac{511}{73} = -7$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 32 \end{pmatrix} = \frac{118}{25}v_1 - 7v_2$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 32 \end{pmatrix} = \frac{118}{25}x_1 - 7\left(x_2 - \frac{x_2 x_1}{x_1^2}x_1\right) = \frac{118}{25}x_1 - 7x_2 + 7\frac{x_2 x_1}{x_1^2}x_1 = \frac{118}{25}x_1 - 7x_2 + 7\cdot\frac{1}{25}\cdot x_1 = 5x_1 - 7x_2$$

↑הגענו לאותה תוצאה.