הרצאה 9

נכתב על ידי נועם יערי

הגדרה

X מ"מ. **השונות** ($Variance$) היא:

$$V(X) = E\left(\left(x - E(X)\right)^2\right)$$
$$= E(X^2 - 2E(X)\cdot X + E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

הערה

אם $X \geq 0$ אז גם $E(X) \geq 0$.

מסקנה

השונות תמיד אי שלילית,

$$E(X)^2 \leq E(X^2)$$

השונות מודדת את ה"רוחב" של ההתפלגות של X.

השוואה

מדגם : משתנה מקרי

ממוצע : תוחלת

סטיית התקן : $\sqrt{\text{שונות}}$

הערות

$$E(\alpha X) = \alpha \cdot E(X)$$
$$V(\alpha X) = \alpha^2 \cdot V(X)$$

בנוסף, תמיד :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$
$$V(X+Y) = E((X+Y)^2) - E(X+Y)^2 =$$
$$E(X^2 + 2XY + Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2 =$$
$$= V(X) + V(Y) + 2\underbrace{\left(E(XY) - E(X)E(Y)\right)}_{Cov(X,Y)}$$

הגדרה

$$E: R \to \mathbb{R}$$

ה - $\boldsymbol{Covariance}$:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E\left(\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right)$$

זו פונקציה בי-לינארית, סימטרית.

$$Cov(X,X) = E(X^2) - E(X) = V(X) \geq 0$$

הגדרה

X,Y בלתי מתואמים אם $Cov(X,Y) = 0$

נוסחה

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\cdot Cov(X,Y)$$

מסקנה

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)\Leftrightarrow \text{בלתי מתואמים } X,Y$$

הגדרה

X,Y מ"מ.

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\cdot\sqrt{V(Y)}}$$

"מקדם המתאם".

טענה

$$-1\le P(X,Y)\le 1$$

הוכחה

לפי אי שוויון קושי - שוורץ בור המכפלה הפנימית $Cov(\cdot,\cdot)$, המשרה את הנורמה

$$||X||=\sqrt{V(X)}$$

(מכפלה פנימית, נורמה, אי שוויון קושי בוניאקובסקי שוורץ)

הגדרה

נניח שדגמנו n זוגות

$$x_1,\cdots,x_n$$

$$y_1,\cdots,y_n$$

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\Sigma x_i\,,\bar{y}=\frac{1}{n}\Sigma y_i$$

$$S_x^2=\frac{1}{n}\Sigma(x_i-\bar{x})^2\,,S_Y^2=\frac{1}{n}\Sigma(y_i-\bar{y})^2$$

מקדם המתאם הוא:

$$\rho_{x,y}=\frac{\frac{1}{n}\Sigma\big((x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\big)}{S_x\cdot S_y}$$

תרגיל: אי שוויון קושי – שוורץ עבור המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^n$:

$$-1\le\rho_{x,y}\le 1$$

(פונקציית $CORREL$ ב$Excel$)

תזכורת

$$E(E(X|Y)=E(X)$$

פירוק השונות

X,Y מ״מ

$$V\big(E(X|Y)\big) = E(E(X|Y)^2) - \underbrace{E\big(E(X|Y)\big)^2}_{E(X)}$$

$$E\big(V(X|Y)\big) = E\big(E(X^2|Y)\big) - E(E(X|Y)^2)$$

$$\Rightarrow V(X) = VE(X|Y) + EV(X|Y)$$

$$V(X) = VE(X|Y) + EV(X|Y)$$

1. X,Y ב״ת $V(X) = 0 + V(X)$
2. $V(X) + 0 \; X = f(Y)$

$$E\big(V(X|Y)\big) = \sum_y P(Y=y) \cdot V(X|Y=y)$$

2.3 התפלגויות בדידות

התפלגות ברנולי:

פרמטר- $0 < p < 1$, $X \sim_{\text{מתפלג לפי}} b_{\text{ברנולי}}(p)$ אם

$$P(X=1)=p, P(X=0)=1-p$$

לדוגמה: הטלת מטבע הוגן מתפלג $b(\frac{1}{2})$

$$E(X)=p$$

$$X^2=X$$

לכן

$$E(X^2)=E(X)=p$$

מכאן ש -

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=p-p^2=p\cdot q_{=1-p}$$

התפלגות בינומית:

פרמטרים $n, 0 \le p \le 1$.

$$X \sim Bin(n,p)$$

סופר הצלחות בסדרה של n ניסויי ברנולי.

$$0 \le X \le n$$

ההתפלגות היא:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k \cdot q^{n-k}$$

בדיקה:

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=K)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1^n=1$$

חישוב התוחלת:

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\cdot k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}p^k q^{n-k}\cdot k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)}p^{k-1+1}\cdot q^{(n-1)-(k-1)}=n\cdot p(p+q)^{n-1}=np$$