פתרון תרגיל 1

תרגילים 1-3 קלים ולכן אני לא כותב פתרון.

תרגיל 4

א.

$$\left(A\cup B^c\right)\cap B=\left(A\cap B\right)\cup\left(B\cap B^c\right)=A\cap B$$

השוויון הראשון נובע מדסטרביוטיביות והשני מהגדרת המשלים והחיתוך.

ב.

$$\left(A\cup B\right)\setminus B=\left(A\cup B\right)\cap B^c=\left(A\cap B^c\right)\cup\left(B\cap B^c\right)=A\cap B^c=A\setminus B .$$

*הוכחנו בתרגול שלכל שתי קבוצות A,B מתקיים השוויון $A\cap B^c=A\setminus B$.

השוויון הראשון נובע מ *.

השוויון השני מדסטריביוטיביות.

השוויון השלישי מהגדרת המשלים והחיתוך.

השוויון הרביעי נובע מ *.

ג.

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i\setminus\bigcap_{j=1}^{m}B_j=\bigcup_{i=1}^{n}A_i\cap\left(\bigcap_{j=1}^{m}B_j\right)^c=\bigcup_{i=1}^{n}A_i\cap\left(\bigcup_{j=1}^{m}B_j{}^c\right)=$$

$$=\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\cap B_1{}^c\right)\cup\ldots\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\cap B_m{}^c\right)=\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\setminus B_1\right)\cup\ldots\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\setminus B_m\right)=$$

$$=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}\left(A_i\setminus B_j\right)$$

השוויון הראשון נובע מ *.

נוכיח את השוויון השני

יהיו $B_1,\ldots B_n$ קבוצות כלשהם נוכיח באינדוקציה ש $\left(\bigcap_{j=1}^{m}B_j\right)^c=\bigcup_{j=1}^{m}B_j{}^c$ עבור $j=1$

נקבל $B_1{}^c=B_1{}^c$.

נוכיח שאם השוויון נכון עבור m טבעי אז הוא נכון גם עבור $m+1$

$$\left(\bigcap_{j=1}^{m+1}B_j\right)^c=\left(\bigcap_{j=1}^{m}B_j\bigcap B_{m+1}\right)^c=\left(\bigcap_{j=1}^{m}B_j\right)^c\bigcup B_{m+1}{}^c=\bigcup_{j=1}^{m}B_j{}^c\bigcup B_{m+1}{}^c=\bigcup_{j=1}^{m+1}B_j{}^c$$

השוויון השני נובע ממשפט דה מורגן והשוויון השלישי מההנחה.

באותו אופן ניתן להוכיח באינדוקציה ש $\bigcup_{i=1}^{n}A_i\cap\left(\bigcup_{j=1}^{m}B_j{}^c\right)=\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\cap B_1{}^c\right)\cup\ldots\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\cap B_m{}^c\right)$

והשוויון הרביעי נובע מ *.

תרגיל 5

א.

נוכיח ש $\bigcap_{i=1} F_i \subseteq F_i$ לכל $i \in I$

אם $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \varnothing$ סיימנו מכיוון שקבוצה ריקה מוכלת בכל קבוצה. (מעכשיו אני אדלג על שלב זה)

אם $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \varnothing$

יהי $x \in \bigcap_{i=1}^{n} F_i$ על פי הגדרת החיתוך $x \in F_i$ לכל $i \in I$.

נוכיח ש $F_i \subseteq \bigcup_{i \in I} F_i$ לכל $i \in I$

יהי $i \in I$ כלשהו ויהי $x \in F_i$ על פי הגדרת האיחוד, אם קיים $i \in I$ שעבורו $x \in F_i$ אז $x \in \bigcup_{i \in I} F_i$,

ולכן $x \in \bigcup_{i \in I} F_i$.

ב.

יהי $x \in A$ על פי הנתון $A \subseteq F_i$ לכל $i \in I$ ולכן $x \in F_i$ לכל $i \in I$ ועל פי הגדרת החיתוך $x \in \bigcap_{i=1}^{n} F_i$

ג.

יהי $x \in \bigcup_{i \in I} F_i$ על פי הגדרת האיחוד קיים $j \in I$ שעבורו $x \in F_j$.

על פי הנתון $A \supseteq F_i$ לכל $i \in I$ ובפרט עבור $j \in I$ נקבל ש $A \supseteq F_j$ מכיוון ש $x \in F_j$ נקבל $x \in A$.

תרגיל 6

א.

למשל $B_i = \left\{ x \in R \middle| \left(-i < x \leq -i+1\right) \vee \left(i-1 < x \leq i\right) \right\}$

ב.

למשל $C_i = N \cup \left\{-i\right\}$

ג.

למשל $D_i = Z \cup \left\{\frac{1}{i+1}\right\}$

תרגיל 7

א. $p(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{1\}\},\{\{1\},\varnothing\}\}$

ב. $p(B)=\{\varnothing,\{1\},\{\{\varnothing\}\},\{1,\{\varnothing\}\}\}$

ג. $p(\varnothing)=\{\varnothing\}$ ולכן קיבלנו איבר אחד. למדנו בהרצאה שאם בקבוצה יש n איברים אז בקבוצת החזקה יש 2^n איברים ולכן נקבל סה"כ 16 איברים.

ד. מכיוון שקבוצה ריקה מוכלת בכל קבוצה נקבל שבשני המקרים הקבוצות, $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ חייבות להופיע.

ה. תחילה נוכיח שאם $A\subseteq B$ אז $P(A)\subseteq P(B)$. יהי $x\in P(A)$ על פי הגדרת קבוצת החזקה $x\subseteq A$ מטרנזטיביות ההכלה נקבל ש $x\subseteq B$ מהגדרת קבוצת החזקה נקבל ש $x\in P(B)$. מהגדרת החיתוך והאיחוד נקבל ש $P(A)\cap P(B)\subseteq P(A)\cup P(B)$ ממה שהוכחנו קודם נקבל ש $P(P(A)\cap P(B))\subseteq P(P(A)\cup P(B))$ ולכן

$\left|P(P(A)\cup P(B))\setminus P(P(A)\cap P(B))\right|=\left|P(P(A)\cup P(B))\right|-\left|P(P(A)\cap P(B))\right|$ מההרצאה

אנו יודעים ש $|P(A)|=2^{|A|}$ ולכן $|P(A)|=8$ וכן $|P(B)|=8$.

נוכיח ש $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$.

תחילה נוכיח ש $P(A)\cap P(B)\subseteq P(A\cap B)$.

יהי $x\in P(A)\cap P(B)$ על פי הגדרת החיתוך $x\in P(A)\wedge x\in P(B)$ על פי הגדרת קבוצת החזקה $x\subseteq A\wedge x\subseteq B$ ועל פי שאלה 5 סעיף ב $x\subseteq A\cap B$ ועל פי הגדרת קבוצת החזקה $x\in P(A\cap B)$.

כעת נוכיח ש $P(A\cap B)\subseteq P(A)\cap P(B)$

יהי $x\in P(A\cap B)$ על פי הגדרת קבוצת החזקה $x\subseteq A\cap B$ על פי הגדרת החיתוך $A\cap B\subseteq A, A\cap B\subseteq B$ מטרנזטיביות ההכלה נקבל $x\subseteq A\wedge x\subseteq B$ מהגדרת קבוצת החזקה $x\in P(A)\wedge x\in P(B)$ ומהגדרת החיתוך $x\in P(A)\cap P(B)$.

סה"כ קיבלנו $|P(A)\cap P(B)|=|P(A\cap B)|=2^{|A\cap B|}=4$ בנוסף

$|P(A)\cup P(B)|=|P(A)|+|P(B)|-|P(A)\cap P(B)|=8+8-4=12$ ולכן

$$\left|P(P(A)\cup P(B))\setminus P(P(A)\cap P(B))\right|=\left|P(P(A)\cup P(B))\right|-\left|P(P(A)\cap P(B))\right|=2^{12}-2^{2}=4080$$

ו. הוכחנו בסעיף הקודם

ז. נשים לב שאם ניקח את הקבוצות בסעיף הקודם נקבל $|P(A\cup B)|=2^{|A\cup B|}=16, |P(A)\cup P(B)|=12$ לא ייתכן שהקבוצות שוות ומספר האיברים בה שונה ולכן קיבלנו מהסעיף הקודם דוגמא נגדית לסעיף זה.

תרגיל 8

1. נוכיח שלכל שתי קבוצות A,B מתקיים:

$$A\cap B=(A\cup B)\setminus((A\cup B)\setminus(A\cap B))$$

$$(A\cup B)\setminus((A\cup B)\setminus(A\cap B))=(A\cup B)\cap((A\cup B)\cap(A\cap B)^c)^c=$$

$$=(A\cup B)\cap((A\cup B)^c\cup(A\cap B))=$$

$$=((A\cup B)\cap((A\cup B)^c)\cup((A\cup B)\cap(A\cap B))=A\cap B$$

השוויון הראשון: הוכחנו בתרגול ש $A\setminus B=A\cap B^c$.
השוויון השני: דה מאובר ומכיוון ש $A=(A^c)^c$
השוויון השלישי: דיסטריביוטיביות
השוויון הרביעי: מכיוון ש $A\cap A^c=\varnothing$. הוכחנו בתרגול שאם $A\subseteq B$ אז $A\cap B=A$ וש $A\cup\varnothing=A$ מכיוון ש $A\cap B\subseteq A\cup B$ נקבל את הדרוש.
כעת הוכחנו בתרגול ש $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.
ולכן $A\cap B=(A\cup B)\setminus((A\setminus B)\cup(B\setminus A))$
נשאר להוכיח ש $A\cap B\in P(X)$. נתון ש $A\in R$ ז"א $A\in P(X)$ ז"א $A\subseteq X$.
$A\cap B\subseteq A$ מטרנזטיביות ההכלה נקבל את הדרוש.

תרגיל 10
א.

$$(a,b)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$$
$$\Updownarrow(1)$$
$$a\in(A\cap B)\wedge b\in(C\cap D)$$
$$\Updownarrow(2)$$
$$(a\in A\wedge a\in B)\wedge(b\in C\wedge b\in D)$$
$$\Updownarrow(3)$$
$$(a\in A\wedge b\in C)\wedge(a\in B\wedge b\in D)$$
$$\Updownarrow(4)$$
$$(a,b)\in(A\times C)\cap(B\times D)$$

1. נובע מהגדרת המכפלה הקרטזית.
2. הגדרת החיתוך.
3. דסטריביוטיביות.
4. הגדרת המכפלה הקרטזית והגדרת החיתוך.

מכיוון של המעברים הם אם ורק אם הראנו בפעולה אחת הכלה דו כיוונית ולכן שוויון.

ב+ג.
דוגמא נגדית שמראה ששני הסעיפים לא נכונים
$A=\{1\},B=\{1\},C=\{1\},D=\{1\}$ כעת $(A\cup B)\times(C\cup D)=(1,1)=(A\times C)\cup(B\times D)$

ד.

לא נכון נניח ש $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$, $C=\{1\}$ ו $D=\{3\}$

נקבל ש $(2,3)\notin(A\setminus C)\times(B\setminus D)$ אבל $(2,3)\in(A\times B)\setminus(C\times D)$.

תרגיל 10

א. לא ייתכן

ב. מספיק שאחד מהקבוצות תהיינה ריקה

ג. לא ייתכן