פתרון תרגיל 1

1. השתמשו במבחנים שלמדנו לטורים חיוביים (מבחן האינטגרל, מבחן ההשוואה הראשון, מבחן ההשוואה השני, מבחן קושי, מבחן דלמבר) כדי לקבוע התכנסות של הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}e^{-\sqrt{n}}}$

נשתמש במבחן ההשוואה הראשון. מתקיים: $\frac{1}{\sqrt{n}e^{-\sqrt{n}}}=\frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$

והרי, הטור: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר ולכן לפי ממבחן ההשוואה הראשון גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}e^{-\sqrt{n}}}$ מתבדר.

ב. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2 k}{2^k}$

נשתמש במבחן ההשוואה הראשון. מתקיים: $\frac{\sin^2 k}{2^k}<\frac{1}{2^k}$.

והרי, הטור: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ מתכנס (סדרה הנדסית אינסופית יורדת עם מנה קטנה מ-1) ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון גם הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2 k}{2^k}$ מתכנס.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)!}{2^n}$

נשתמש במבחן דלמבר: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)(n+2)!}{2^{n+1}}}{\frac{n(n+1)!}{2^n}}=\frac{(n+1)(n+2)}{2n}\xrightarrow{n\to\infty}\infty$

ולכן, הטור מתבדר.

ד. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2+\sin(k)}{k^2+10}$

נשתמש במבחן ההשוואה הראשון. מתקיים: $\frac{2+\sin(k)}{k^2+10}\le\frac{2+1}{k^2+10}=\frac{3}{k^2+10}\le\frac{3}{k^2}$

והרי, הטור: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{k^2}$ מתכנס ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון גם הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2+\sin(k)}{k^2+10}$ מתכנס.

ה. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln(k)}{k}$

נשתמש במבחן האינטגרל: נסמן את הפונקציה: $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ זו פונקציה חיובית ויורדת ולכן האינטגרל והטור מתבדרים ומתכנסים כאחד. נחשב את האינטגרל:

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln k}{k}dx=[\ln k]_1^{\infty}=\lim_{b\to\infty}[\ln b-ln1]=\infty$$

ולכן גם הטור מתבדר.

2. בדקו אם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט/בתנאי/מתבדרים:

א. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+2)\ln^2(k+2)}$

נסמן: $a_n=\frac{1}{(k+2)\ln^2(k+2)}$

מכיוון שזהו טור מחליף סימן ו a_n -מונוטונית יורדת ל- 0 ,הטור מתכנס לפי מבחן לייבניץ .
נבדוק התכנסות בהחלט. נשתמש במבחן האינטגרל:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{(k+2)\ln^2(k+2)}dx$$

נבצע החלפת משתנים: $t=\ln(x+2)\,,dt=\frac{1}{x+2}$ ונקבל:

$$\int_{\ln(3)}^{\infty}\frac{1}{t^2}dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_{\ln(3)}^{\infty}=\lim_{b\to\infty}-\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{\ln(3)}\right)=\frac{1}{\ln(3)}<\infty$$

ולכן גם הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)\ln^2(k+2)}$ כלומר, הטור מתכנס בהחלט.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$

נסמן: $a_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}$

מכיוון שזהו טור מחליף סימן ו a_n -מונוטונית יורדת ל- 0 ,הטור מתכנס לפי מבחן לייבניץ .
נבדוק התכנסות בהחלט.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ שקול לטור: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.5}}$ מתכנס.
ולכן הטור מתכנס בהחלט.

ג. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

נסמן: $a_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln(\mathrm{n}+1)-\ln(\mathrm{n})$

נבדוק אם הטור: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. נחשב את הסכומים החלקיים:

$$s_n=a_1+a_2+\dots+a_n=ln2-ln1+ln3-ln2+\dots+\ln(n+1)-\ln(n)$$
$$=\ln(n+1)-\ln(1)=\ln(n+1)\xrightarrow{n\to\infty}\infty$$

ולכן: $\lim_{\mathrm{n}\to\infty}S_n=\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\ln(n+1)=\infty$

כלומר, הטור מתבדר ולכן אין התכנסות בהחלט.
נבדוק אם הטור מתכנס בתנאי.

הסדרה $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ מונוטונית יורדת ל-0 והטור הוא טור עם סימנים מתחלפים ולכן הוא טור לייבניץ ולכן הוא מתכנס בתנאי.

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4-n^2}}$

תחילה, נפשט את הביטוי: $\frac{1}{\sqrt{n^4-n^2}}=\frac{1}{\sqrt{n^2(n^2-1)}}=\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

נבצע מבחן ההשוואה הגבולי עם $\frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}=1$$

כלומר הטור שלנו חבר של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ וטור זה מתכנס ולכן גם הטור שלנו מתכנס.
ומכיוון שהוא תמיד חיובי הוא מתכנס בהחלט.

3. יהיו $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ טורים.

הוכיחו/הפריכו:

אם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ וגם, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס, אזי גם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

הפרכה:

נגדיר $a_n=\frac{1}{n}$, ו $b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. אכן מתקיים כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}=0$$

וכן כי $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ טור מתכנס, אך $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ הוא טור מתבדר.

4. בסדרות הבאות מצאו את פונקציית הגבול וקבעו את יש התכנסות במידה שווה:

א. $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$ בתחום $[0,1]$

נמצא את פונקציית הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}x^n-x^{n+1}=\lim_{n\to\infty}x^n(1-x)=0$$

הסבר: עבור x<1 אז $x^n\xrightarrow{n\to\infty}0$. ועבור x=1 נקבל ממש שוויון ל-0.

נבדוק התכנסות במידה שווה:

$$\lim_{n\to\infty}\left[sup_{x\in[0,1]}\{|f_n(x)-f(x)|\}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[sup_{x\in[0,1]}\{|x^n-x^{n+1}|\}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[sup_{x\in[0,1]}|x^n(1-x)|\right]$$

הפונקציה $x^n(1-x)$ רציפה בקטע סגור $[0,1]$ ולכן נמצא את נקודת המקסימום שלה:

$$\frac{d}{dx}\left(x^n(1-x)\right)=nx^{n-1}(1-x)-x^n=0$$

מתקבל כי נקודת הקיצון שלה הוא: $x=\frac{n}{n+1}$.

נציב בחזרה ונקבל:

$$\operatorname{Lim}_{n\to\infty}\left[sup_{x\in[0,1]}|x^n(1-x)|\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)\right|\right]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left|\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n\left(\frac{n+1-n}{n+1}\right)\right|\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\left|\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\left(\frac{1}{n+1}\right)\right|\right]=\frac{1}{e}\cdot 0=0$$

כלומר הסדרה מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,1]$

ב. $f_n(x)=\frac{1}{nx+1}$ בתחום $(0,\infty)$

נמצא את פונקציית הגבול:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{nx+1}=0$ לכל x>0 ולכן פונקציית הגבול היא: $f(x)=0$

נשתמש במבחן ה-lim-sup כדי לבדוק התכנסות במידה שווה:

$$sup_{x\in(0,\infty)}\left\{\frac{1}{nx+1}\right\}=1$$

ולכן אין התכנסות במידה שווה בקטע

ג. $f_n(x)=\frac{\arctan(x)}{n}$ בכל $\mathbb{R}$

נמצא את פונקציית הגבול:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\arctan(x)}{n}=0$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכן פונקציית הגבול היא: $f(x)=0$

נשתמש במבחן ה-lim-sup כדי לבדוק התכנסות במידה שווה:

$$sup_{x\in(0,\infty)}\left\{\frac{\arctan(x)}{n}\right\}=\frac{\pi}{2n}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

ולכן יש התכנסות במידה שווה בכל $\mathbb{R}$

5. השתמשו במבחן ה-M של ויירשטראס והוכיחו התכנסות של הטור הבא:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\left(\frac{1}{4^n x}\right)$ בקטע $[1,\infty)$

נבדוק האם יש התכנסות במ"ש: לכל $x>0$ מתקיים $\sin x\le x$, לכן בפרט:

$$\sum_{n=1}^{\infty}3^n\cdot\sin\left(\frac{1}{4^n x}\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}3^n\cdot\left(\frac{1}{4^n x}\right)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\le\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

שכן $x\ge 1\Leftarrow\frac{1}{x}\le 1$. ואולם זהו טור שידוע שמתכנס (ל- 3), ולכן הטור שלנו מתכנס במ"ש ממשפט ויירשטראס.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)\sqrt{n}}$ בקטע $I=[-1,1]$.

ננסה לחסום את האיבר הכללי ע"י סדרה שהטור שלה מתכנס:

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)\sqrt{n}}\right|=\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)\sqrt{n}}\le\frac{1}{(2n+1)\sqrt{n}}\le\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{1.5}}$$

וידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.5}}$ מתכנס ולכן לפי משפט ויירשטראס גם הטור הנתון מתכנס במידה שווה בקטע $[-1,1]$.