

תורת המשחקים - שיעור 12

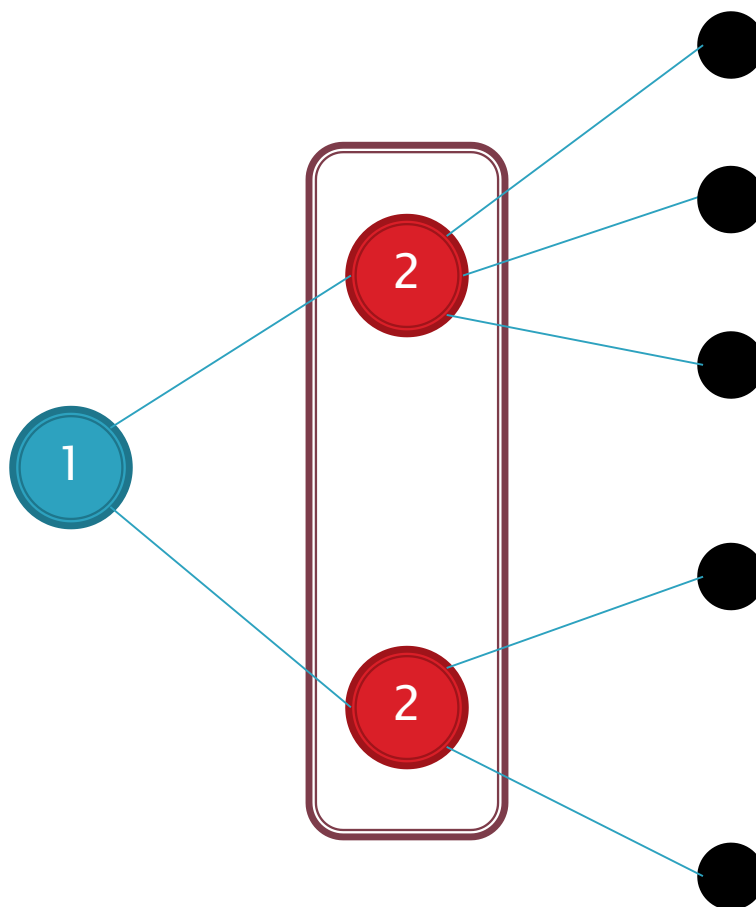
משחקים עם ידיעה לא שלמה

קבוצת ידיעה – information set

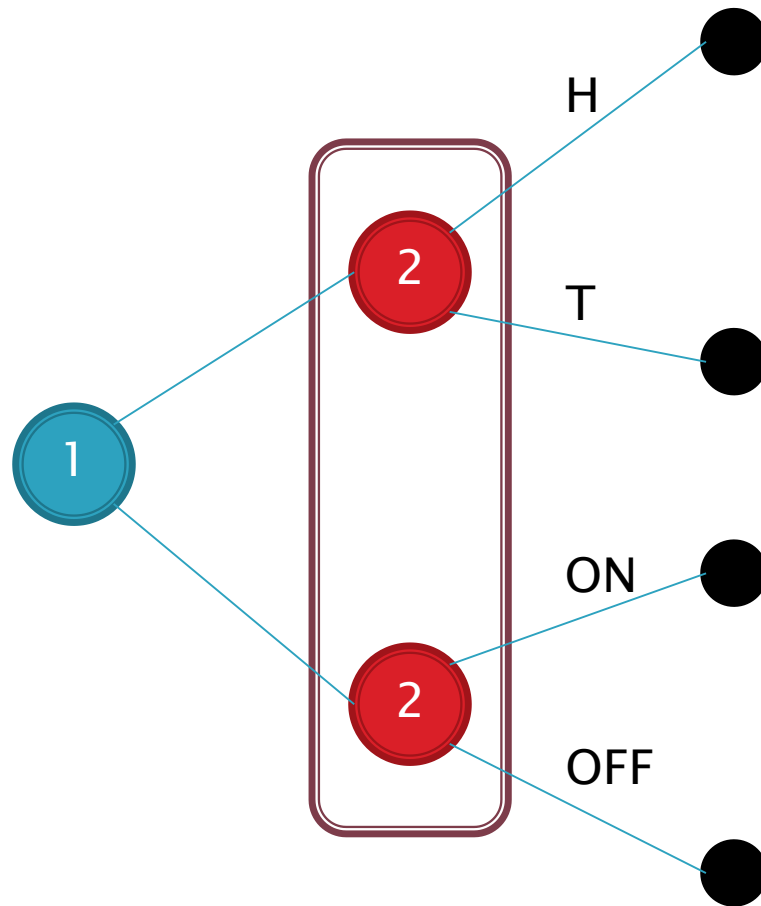
▶ **קבוצת ידיעה מורכבת מ-**

- תת-קבוצת קדקדים השייכת לשחקן i .
- לכל קדקד בקבוצת הידיעה יש אותה קבוצת מהלכים אפשריים.
- השחקן אינו מסוגל להבחין באיזה קדקד מתוך קבוצת הידיעה הוא נמצא.

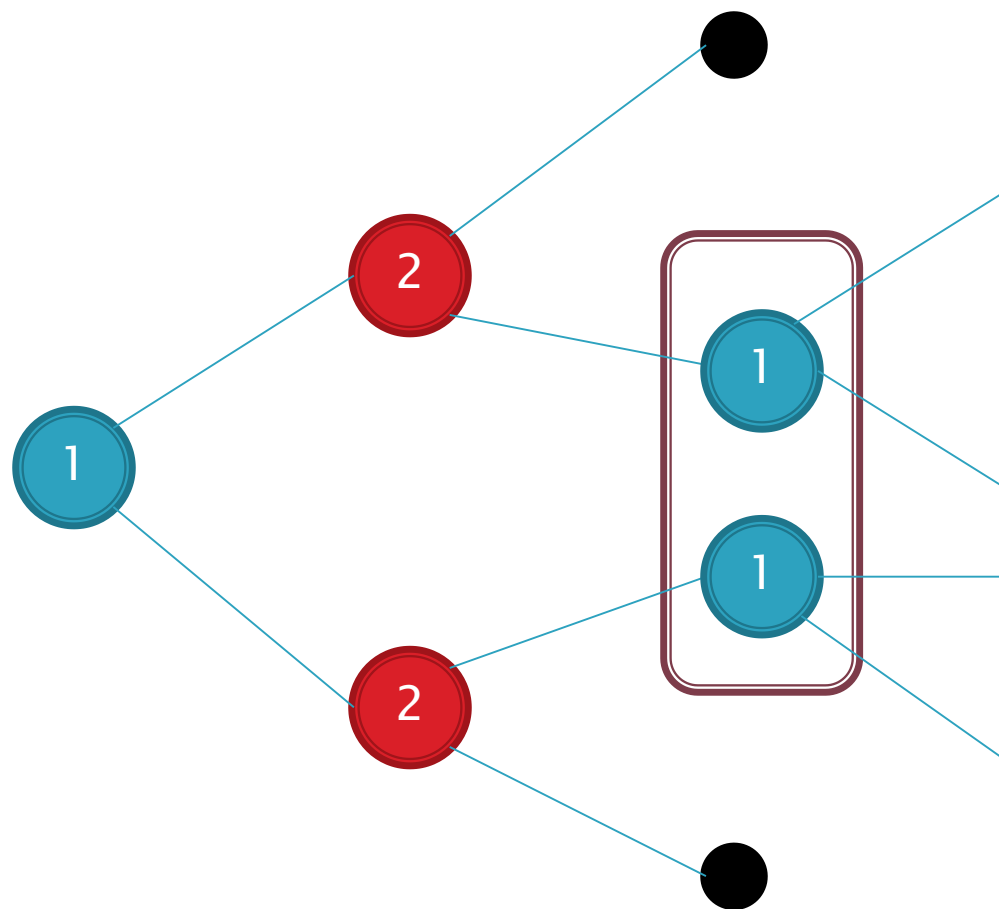
דוגמאות לקבוצות ידיעה חוקיות / לא חוקיות



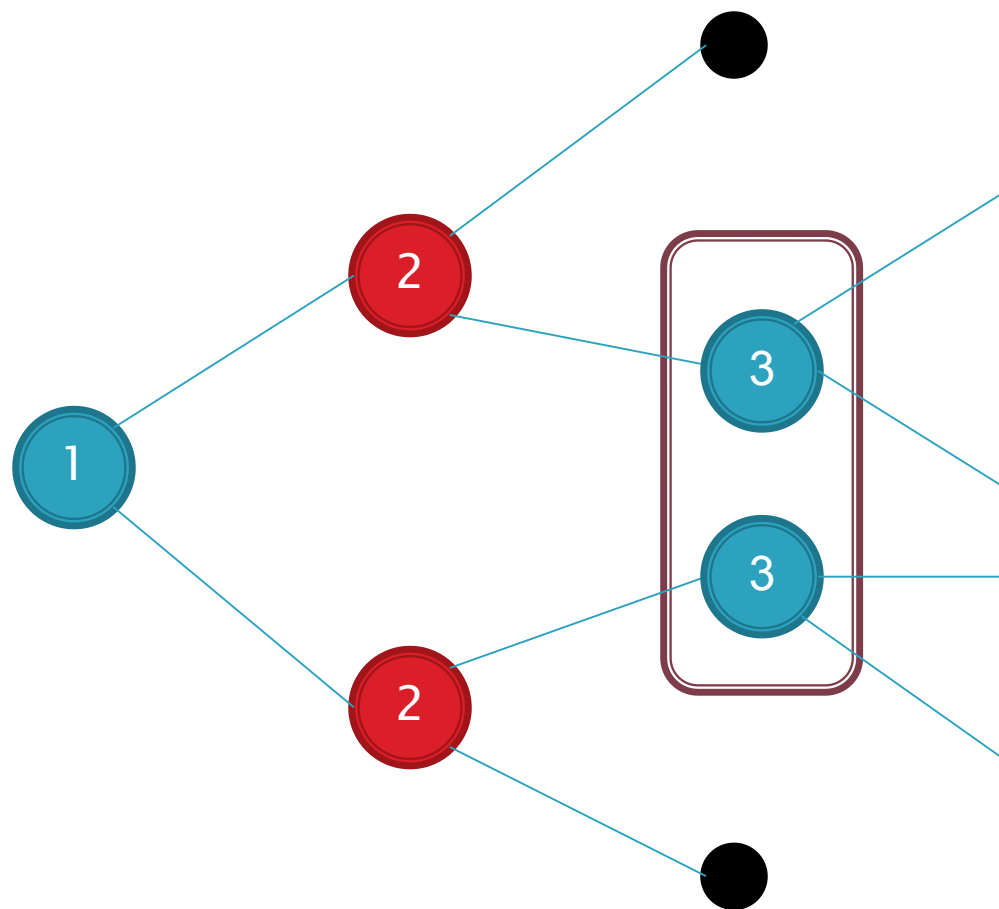
▶ לא חוקית - כיוון ששחקן 2 יודע לפי מספר המהלכים בכל קדקד באיזה קדקד הוא נמצא.



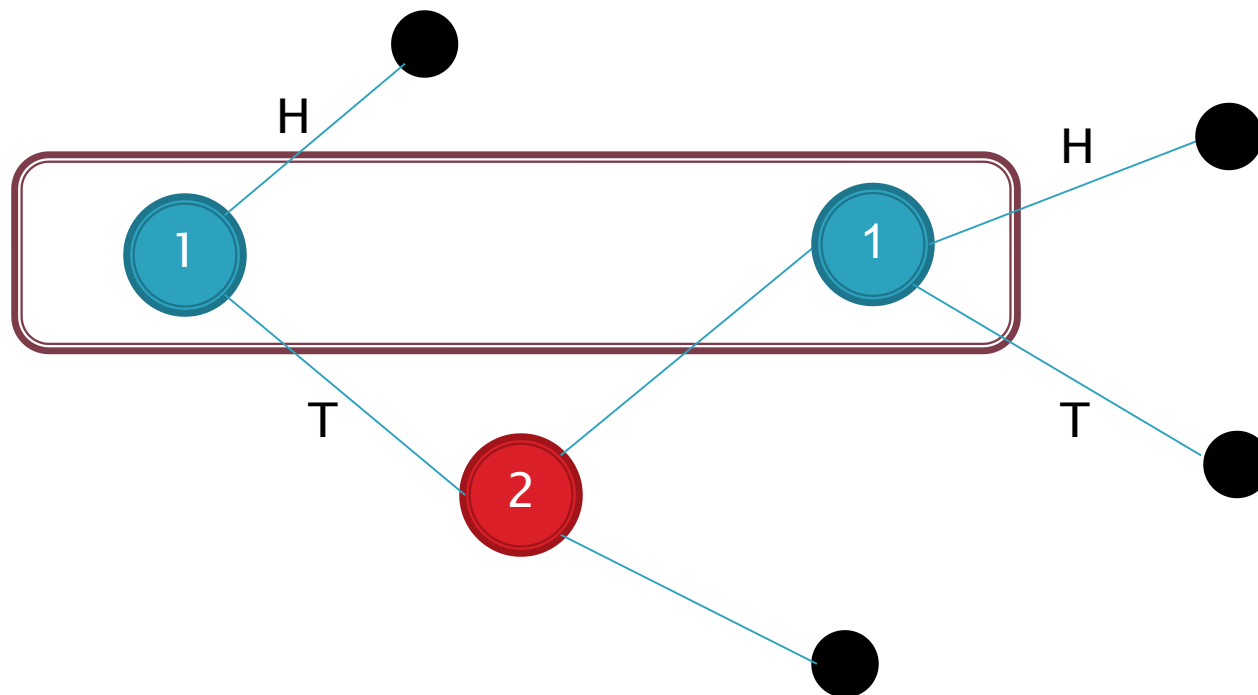
▶ לא חוקית - לפי סוגי המהלכים, שחקן 2 יודע להבדיל בין הקדקדים בקבוצת הידיעה שלו.



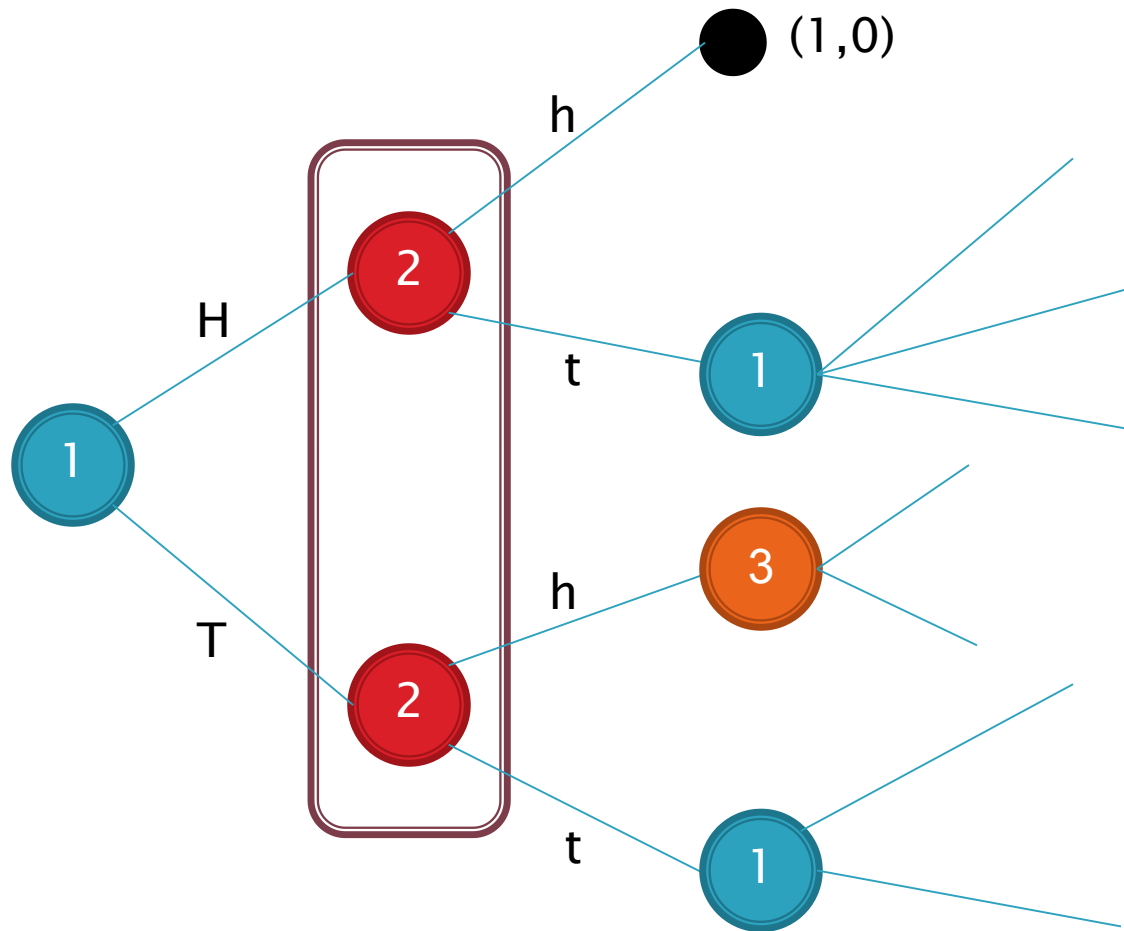
▶ לא חוקית - שחקן 1 יודע באיזה מהלך הוא בחר בתור הראשון, ולכן אם הוא יגיע לקבוצת הידיעה, הוא יודע בדיוק באיזה אחד משני הקדקדים הוא נמצא.



חוקית - ההנחה כאן היא ששחקן 3 לא חזה במהלכי השחקנים האחרים, ולכן לא יודע באיזה קדקד הוא נמצא.



▶ תלוי - באם אנחנו מאפשרים לשחקנים "לשכוח" מהלכים שהם עשו בעבר, כי אם שחקן 1 זוכר שהוא כבר שיחק פעם אחת, אז הוא יודע שהוא נמצא בקדקד הפנימי יותר.



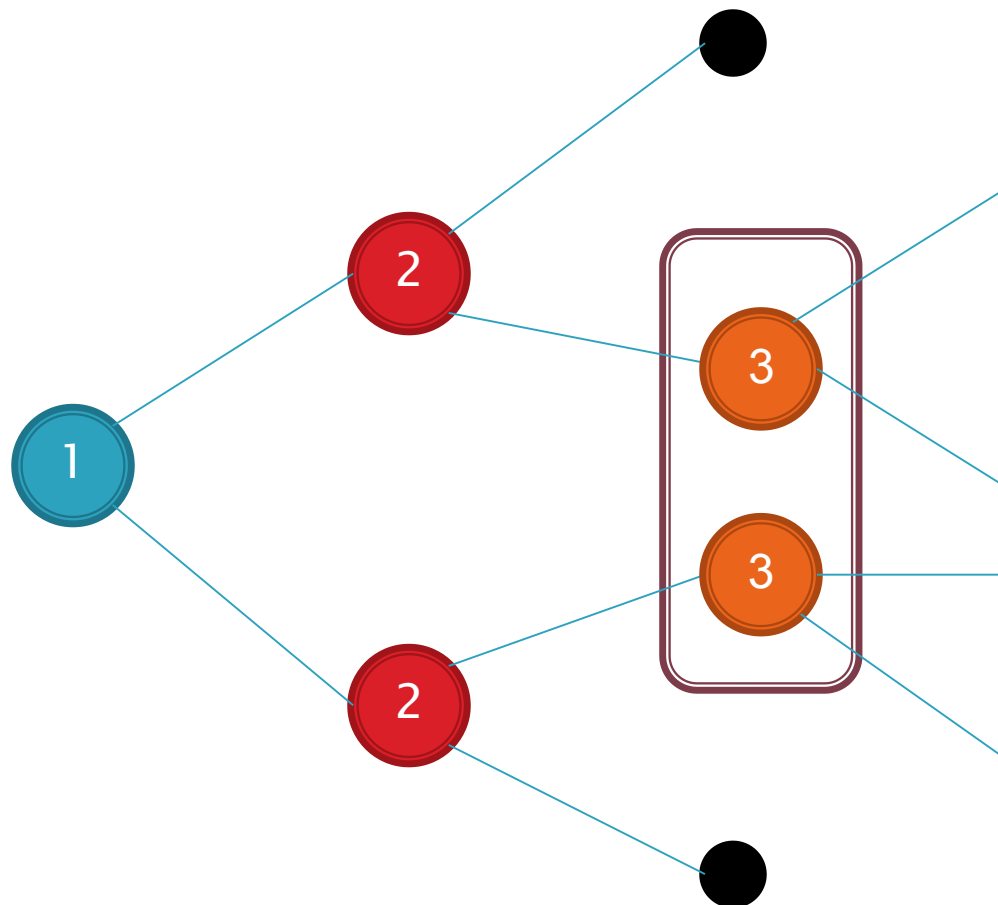
חוקית – ההנחה היא ששחקן 2 יכול לראות רק את
 המהלכים העומדים לרשותו בקבוצת הידיעה, ואינו יכול
 לראות שהם מובילים לעצים שונים.

הגדרה מחדש של משחק בצורה רחבה

▶ הגדרה: **משחק בצורה רחבה** (עם קבוצות ידיעה) מורכב מ-

- קבוצה סופית של שחקנים
- עץ משחק
- כל קדקד שאינו עלה שייך לבדיוק אחד מהשחקנים (זוהי **חלוקה** של קבוצת הקדקדים שאינם עלים).
- קבוצה סופית של קבוצות ידיעה
- כל קדקד שאינו עלה שייך לבדיוק אחת מקבוצות הידיעה.
- כל עלה מתאים לתוצאה של המשחק (כלומר התשלומים לשחקנים)

דוגמה



- במשחק זה יש 4 קבוצות ידיעה: ▶
- 3 קדקדים שמוכלים כל אחד בקבוצת ידיעה משלו
 - 2 קדקדים שמוכלים באותה קבוצת ידיעה

משחק עם ידיעה שלמה / לא שלמה

▶ משחק בצורה רחבה ייקרא **בעל ידיעה שלמה** אם כל קבוצות הידיעה במשחק מורכבות מקדקד אחד בלבד.

◦ אלה בדיוק המשחקים בצורה רחבה שדנו בהם עד עכשיו.

▶ משחק ייקרא **בעל ידיעה לא שלמה** אם הוא אינו בעל ידיעה שלמה.

קבוצת מהלכים של קבוצת ידיעה

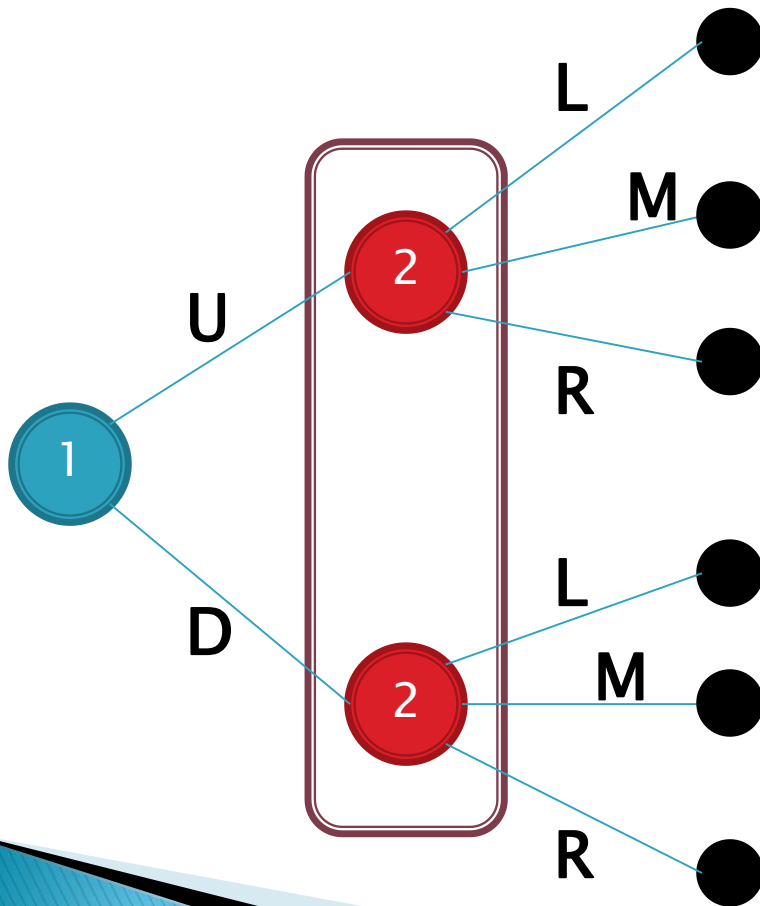
- ▶ לכל קדקד בקבוצת ידיעה יש אותה קבוצת מהלכים כמו לשאר הקדקדים באותה קבוצת ידיעה.
- ▶ לכן ניתן להגדיר ש-**קבוצת המהלכים** של קבוצת ידיעה היא קבוצת המהלכים מאחד מהקדקדים בקבוצת הידיעה.

הגדרה מחדש של אסטרטגיה

- ▶ **אסטרטגיה** של שחקן i היא פונקציה שמתאימה לכל קבוצת ידיעה את אחד המהלכים החוקיים של קבוצת הידיעה.
- ▶ זהו למעשה ספר מהלכים של שחקן במשחק. בהינתן אסטרטגיה של כל שחקן, ניתן לדעת בדיוק איך יתנהל המשחק וכיצד הוא יסתיים.
- ▶ בעזרת האסטרטגיות ניתן לתרגם משחק בצורה רחבה עם קבוצות ידיעה למשחקים אסטרטגיים, ולמצוא בהם נקודות שיווי משקל וכו'.

תרגיל

כמה אסטרטגיות יש לשחקנים במשחק הבא: ▶

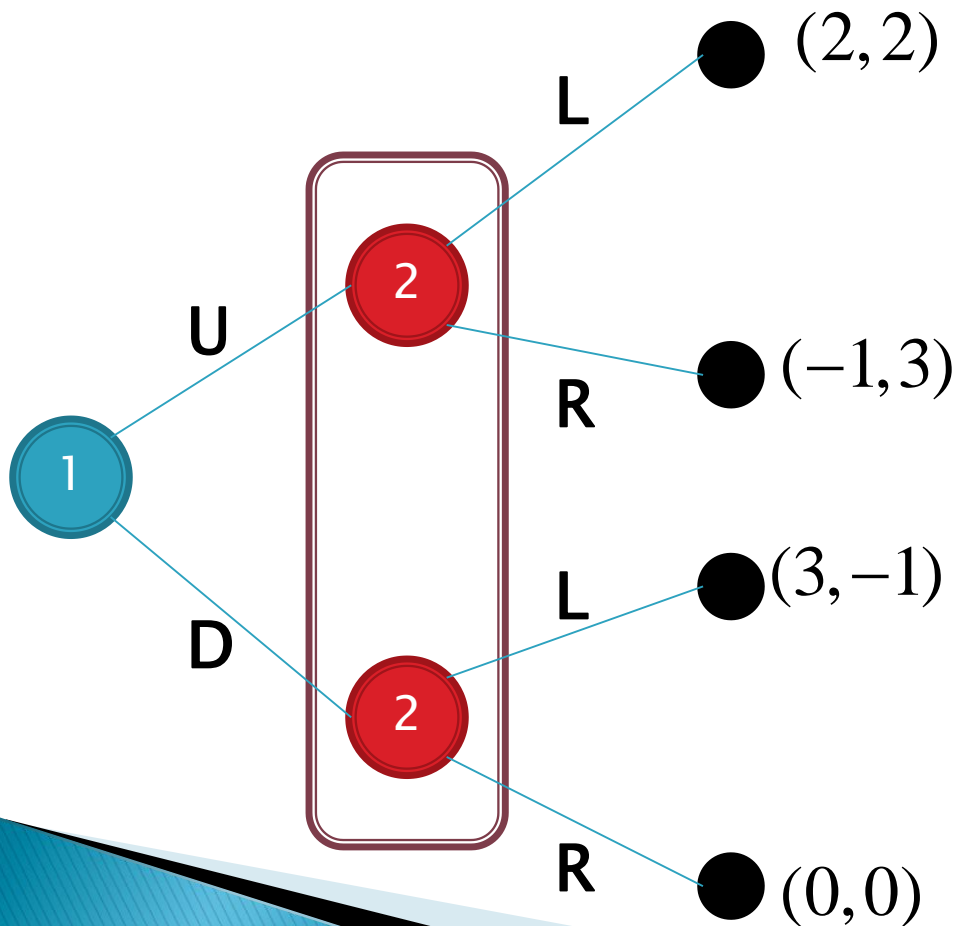


תשובה: ▶

2 אסטרטגיות לשחקן 1 ▶

3 אסטרטגיות לשחקן 2 ▶

▶ תרגמו את המשחק הבא למשחק בצורה אסטרטגית.



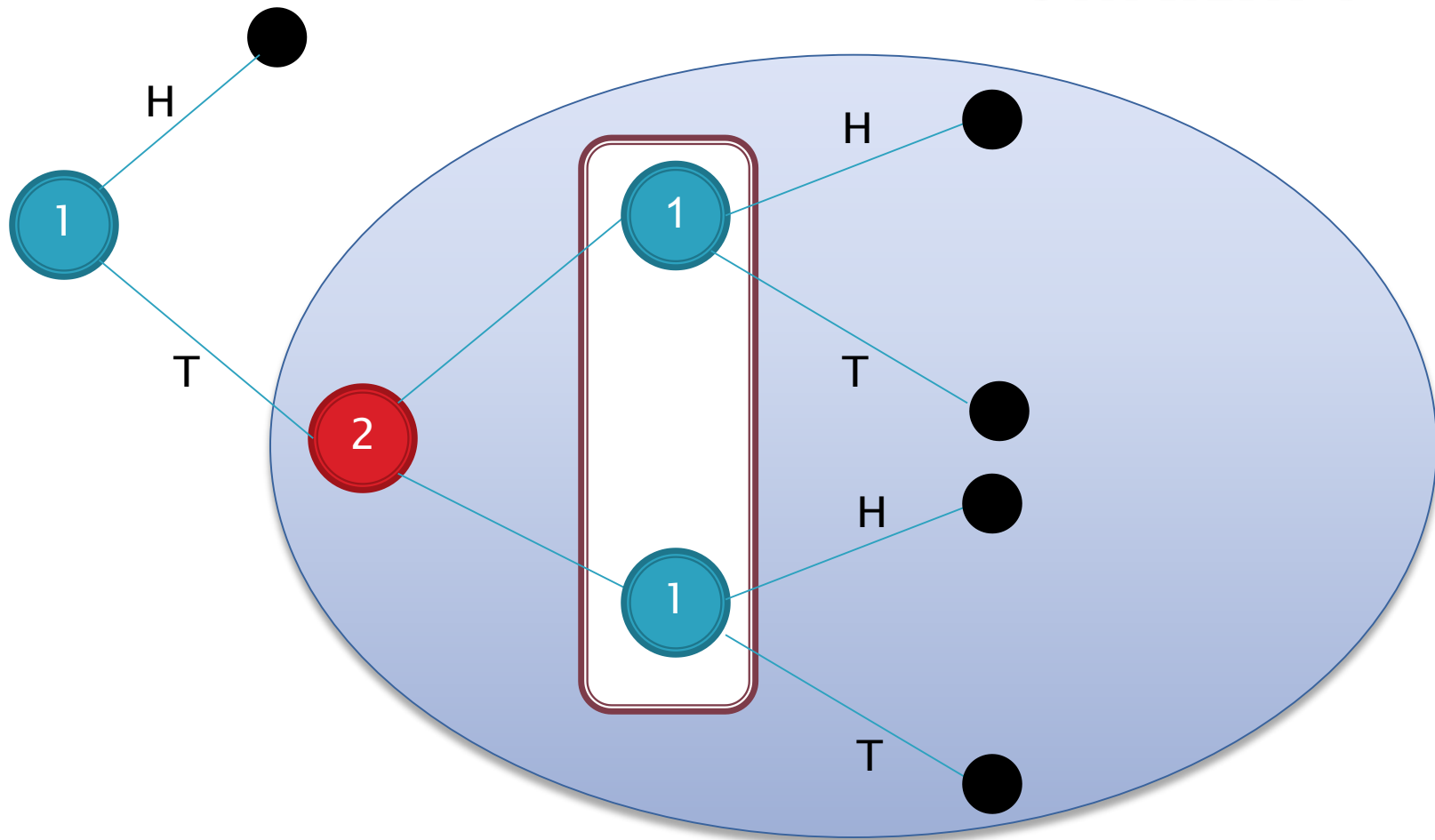
		שחקן 2	
		L	R
שחקן 1	U	2,2	-1,3
	D	3,-1	0,0

- ▶ זוהי מטריצה המתארת את דילמת האסיר!
- ▶ U - לא להלשין, D - להלשין
- ▶ L - לא להלשין, R - להלשין

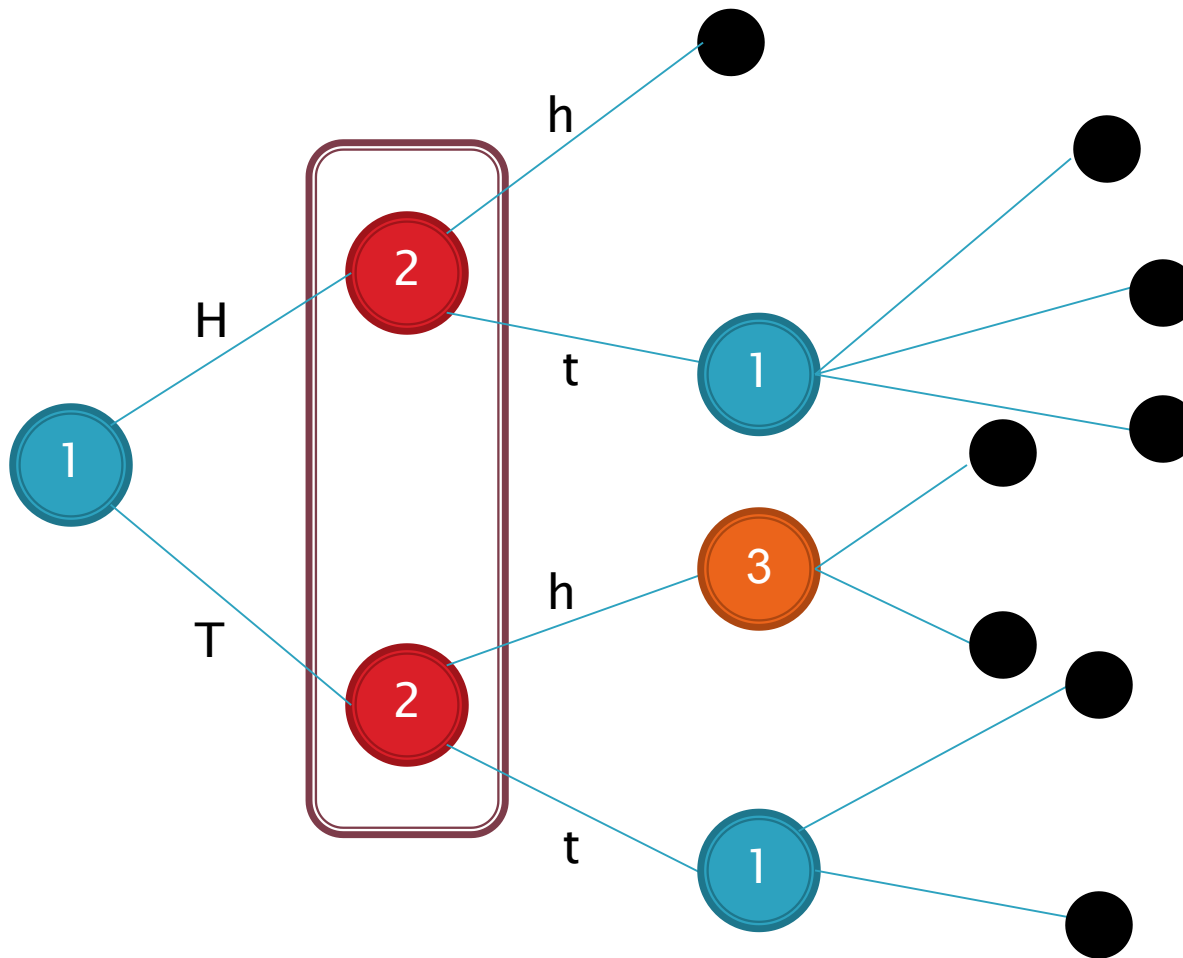
הגדרה מחדש של תת-משחק

- ▶ יהי G משחק בצורה רחבה עם קבוצות ידיעה, **תת-משחק** G' של G הוא משחק בצורה רחבה המקיים:
 - עץ המשחק של G' הוא תת-עץ (שאינו עלה) של G
 - התת-עץ מכיל את כל צאצאיו של שורש התת-עץ כקדקד בעץ של G .
 - חלוקת הקדקדים שאינם עלים לשחקנים ולקבוצות הידיעה ב G' הן צמצום של אלה של G .
 - G' לא "שובר" קבוצות ידיעה של G , כלומר:
 - אם קדקד ב G' נמצא בקבוצת ידיעה ב G אזי כל הקדקדים של קבוצת הידיעה נמצאים ב G' .

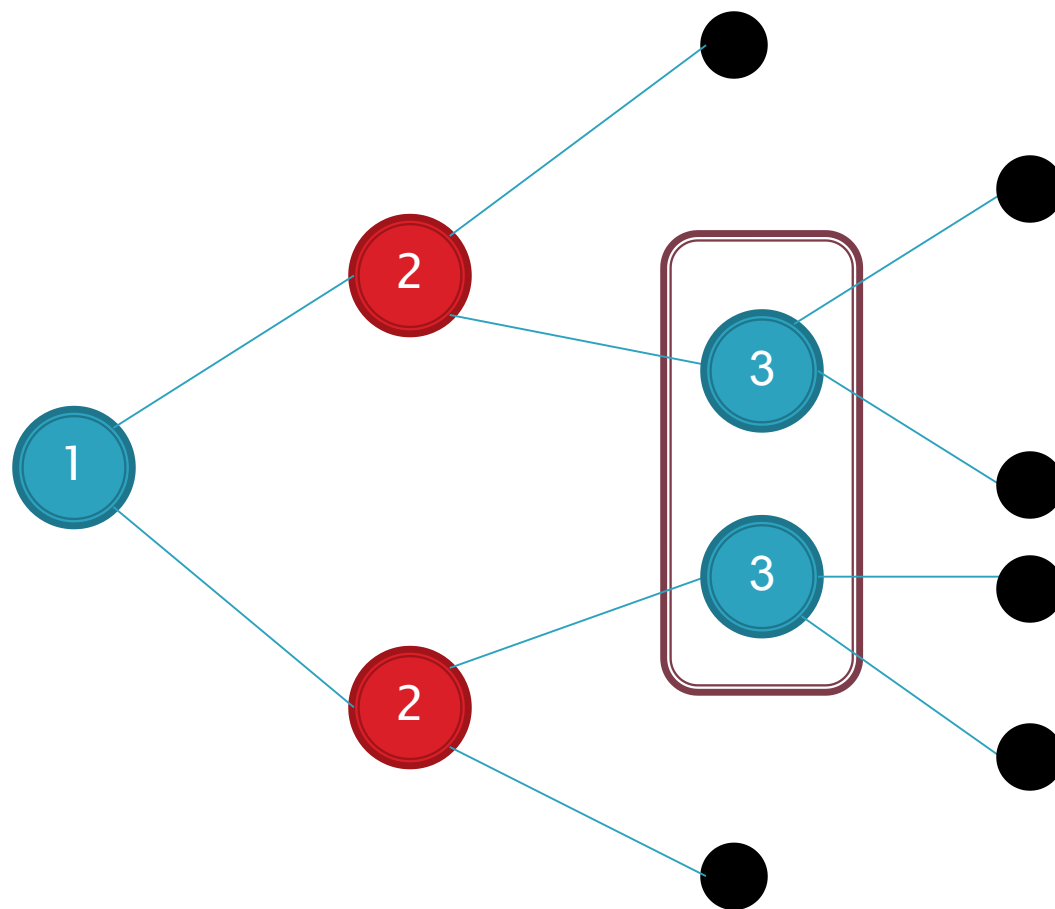
דוגמאות



- ▶ במשחק זה ישנם שני תת-משחקים בלבד:
- ▶ תת-המשחק שמסומן בסגול, והמשחק המקורי



במשחק זה ישנם 4 תתי-משחקים. ▶



▶ במשחק זה יש תת-משחק יחיד - והוא המשחק כולו.

שיווי משקל משוכלל

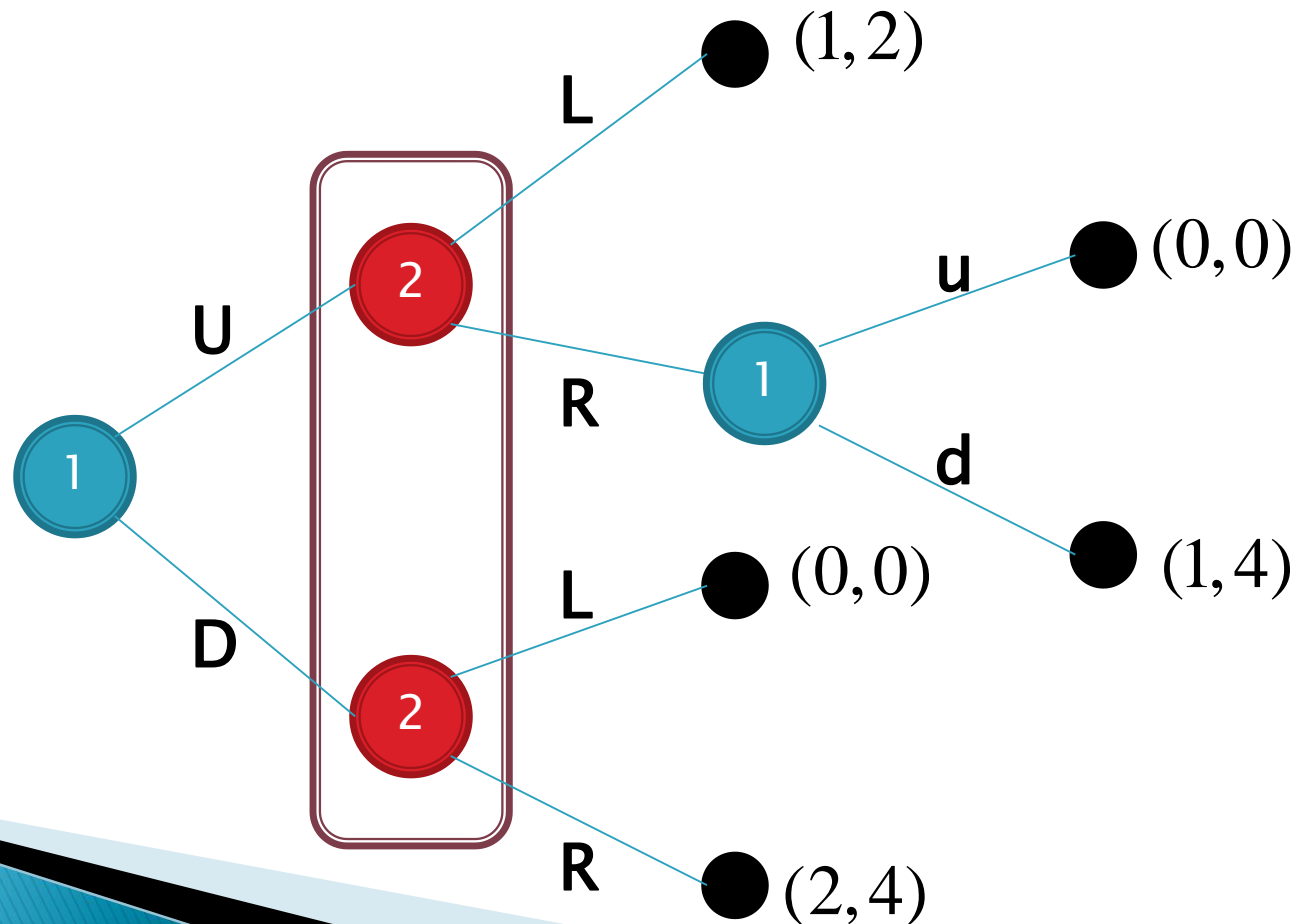
- ▶ בזכות ההגדרות החדשות הנ"ל, הגדרת שיווי משקל משוכלל נשארת זהה (הגדרנו בשיעור 10):
- ▶ במשחק בצורה רחבה, שיווי משקל נאש נקרא **שיווי משקל משוכלל**, אם הוא משרה שיווי משקל נאש בכל אחד מתתי-המשחקים של המשחק.
- ▶ נקרא subgame perfect equilibrium באנגלית, ומסומן SPE בקיצור.

אינדוקציה לאחור

- ▶ אינדוקציה לאחור עובדת גם עבור משחקים עם ידיעה לא שלמה:
- ▶ בוחרים תת-משחק מינימלי (כלומר כזה שלא מכיל אף משחק אחר).
- ▶ מוצאים בתת-המשחק המינימלי נקודות שיווי משקל נאש
- ▶ עבור כל שיווי משקל: מחליפים את תת-המשחק בעלה שהתשלומים בו הם התשלומים בשיווי המשקל.
- ▶ חוזרים לתחילת האלגוריתם.
- ▶ משפט: תהליך האינדוקציה לאחור מזהה את כל שיווי המשקל המשוכללים במשחק.

תרגיל

▶ מצאו את כל שיווי המשקל, ואת כל שיווי המשקל המשקל המשוכללים במשחק הבא:

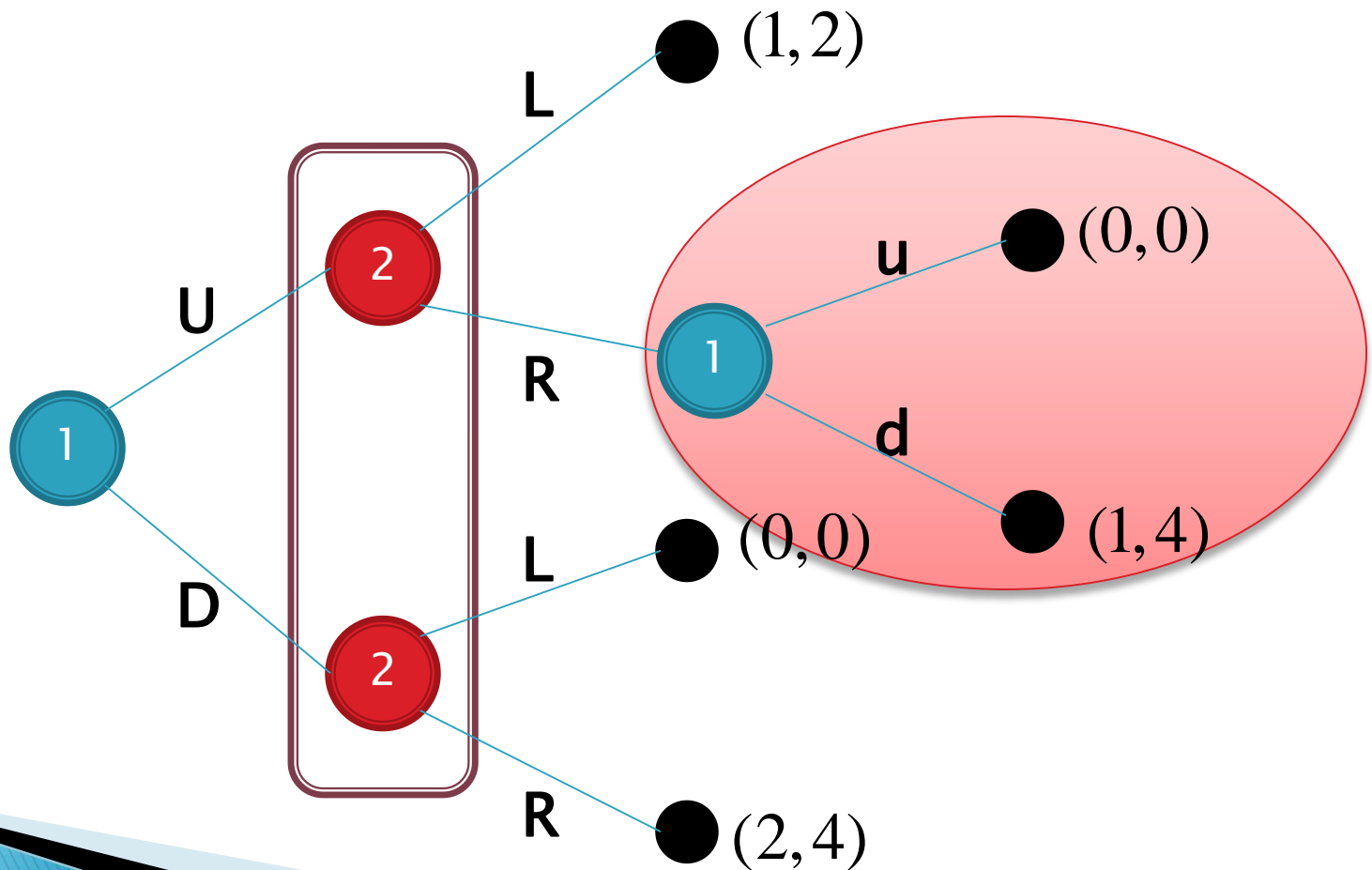


שחקן 2

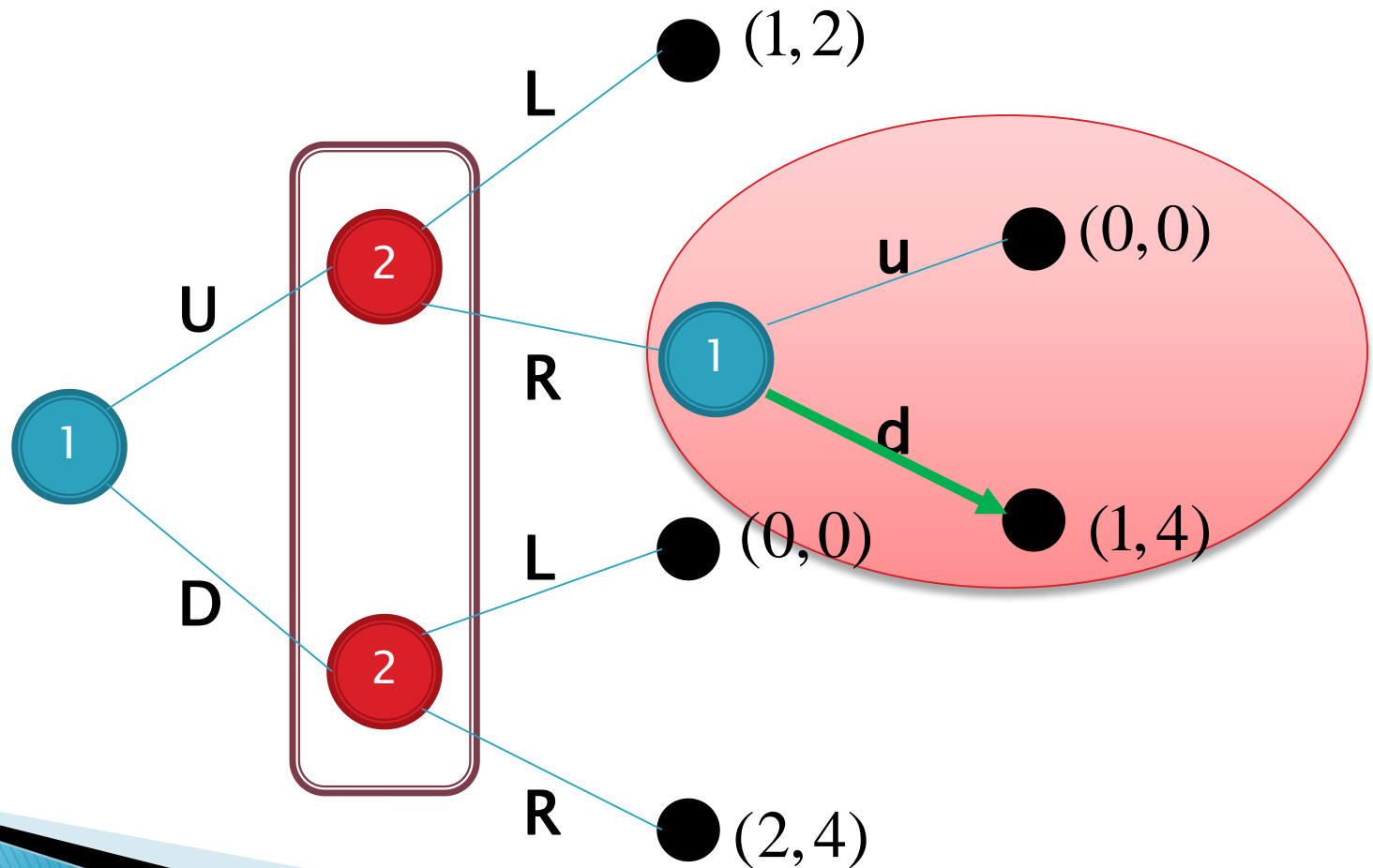
		שחקן 2	
		L	R
שחקן 1	Uu	<u>1</u> , <u>2</u>	0,0
	Ud	<u>1</u> , 2	1, <u>4</u>
	Du	0,0	<u>2</u> , <u>4</u>
	Dd	0,0	<u>2</u> , <u>4</u>

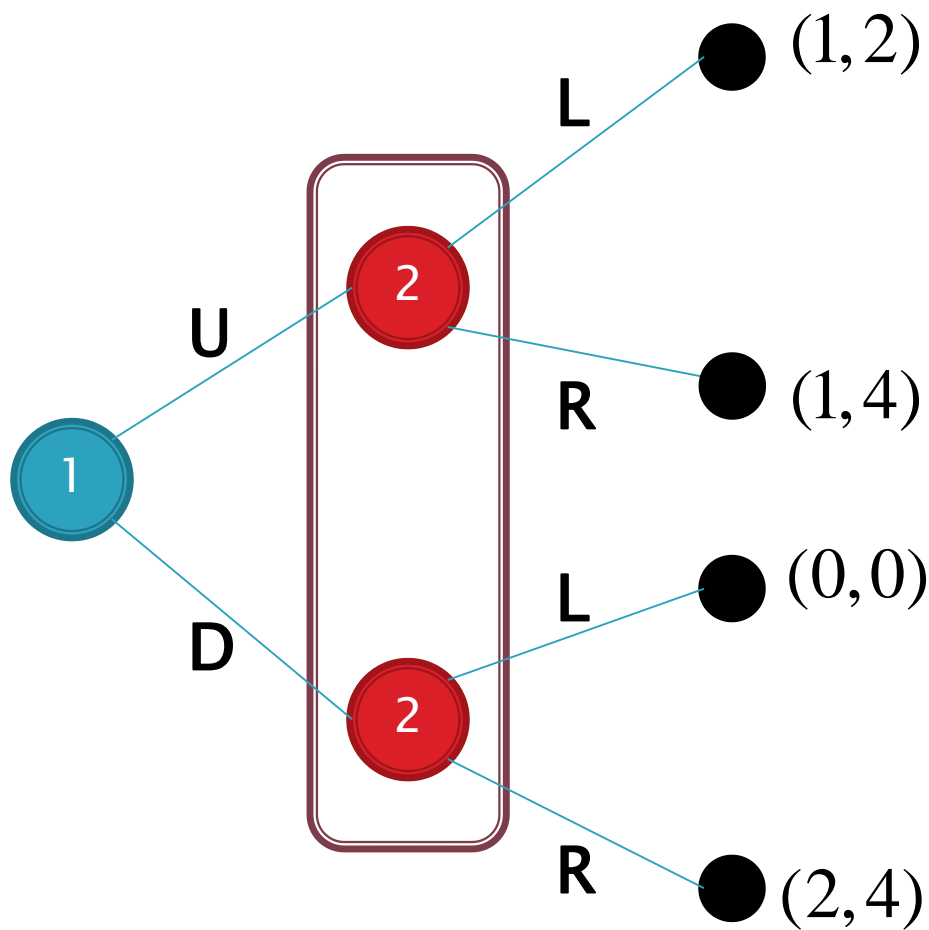
- ▶ ישנם 3 שיווי משקל נאש במשחק: $(Uu, L), (Du, R), (Dd, R)$
- ▶ במשחק זה שיווי המשקל (Uu, L) הוא איום לא אמין, כיוון ששחקן 1 מנסה לדחוף את שחקן 2 לבחור באסטרטגיה L, אך אם שחקן 2 ייבחר ב R כבר אין סיבה לשחקן 1 לבחור ב U.

▶ כעת נפעיל אינדוקציה לאחור על המשחק הנ"ל.



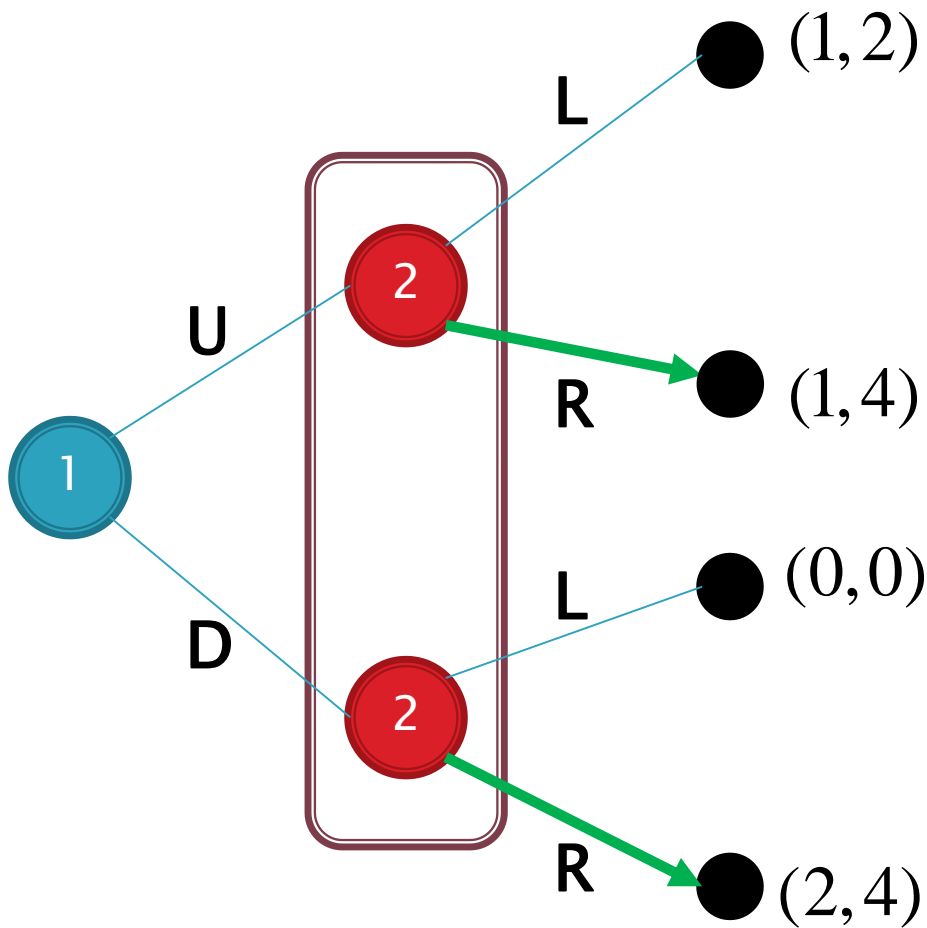
▶ כעת נפעיל אינדוקציה לאחור על המשחק הנ"ל.



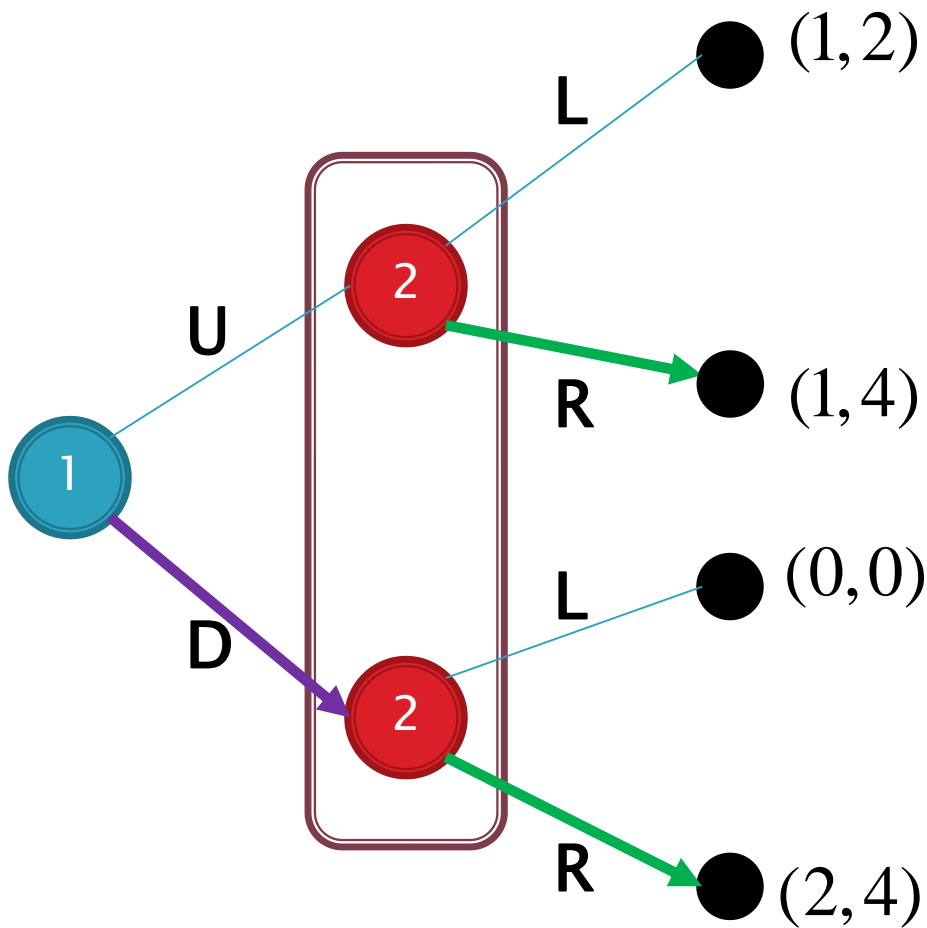


במשחק זה "נרמה" ולא
 נשתמש באלגוריתם כפי
 שהוא הוגדר קודם לכן.
 נראה שניתן להשתמש
 באינדוקציה לאחור בצורה
 הרגילה:

- ▶ במשחק שנשאר, קל לראות ש R היא התגובה המיטבית בכל אחד מהקדקדים בקבוצת הידיעה של 2.
- ▶ R שולטת חזק על L, ולכן היא משתתפת בשיווי המשקל.
- ▶ לכן R משתתפת בשיווי משקל משוכלל.



- ▶ במשחק שנשאר, קל לראות ש R היא התגובה המיטבית בכל אחד מהקדקדים בקבוצת הידיעה של 2.
- ▶ R שולטת חזק על L , ולכן היא משתתפת בשיווי המשקל.
- ▶ לכן R משתתפת בשיווי משקל משוכלל.



- ▶ במשחק שנשאר, קל לראות ש R היא התגובה המיטבית בכל אחד מהקדקדים בקבוצת הידיעה של 2.
- ▶ R שולטת חזק על L, ולכן היא משתתפת בשיווי המשקל.
- ▶ לכן R משתתפת בשיווי משקל משוכלל.

סיכום התרגיל

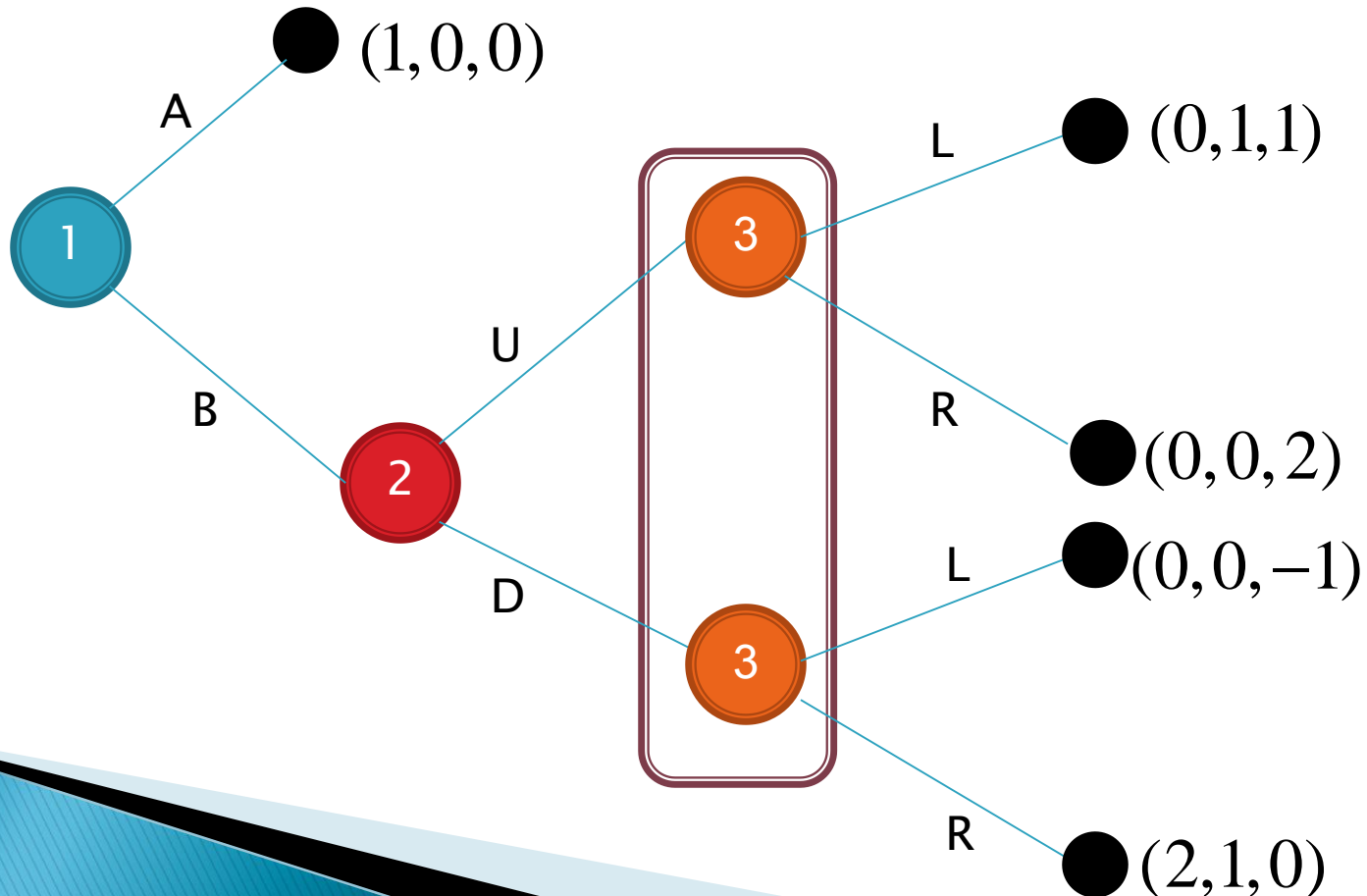
- ▶ קיבלנו ש (Dd, r) הוא שיווי המשקל המשוכלל היחיד במשחק.
- ▶ במקרה זה נקבל ששיווי המשקל המשכלל הוא "פתרון" טוב למשחק.

הערה

▶ על תת-משחקים כמו משחק התאמת המטבעות לא נוכל להשתמש בטריק הנ"ל, כיוון שאין במשחק זה אסטרטגיה שולטת חזק, ונאלץ לנתח תת-משחקים כאלה בעזרת מטריצה.

תרגיל - 3 שחקנים

- ▶ א. תרגמו את המשחק הבא למשחק בצורה אסטרטגית, ומצאו את כל שיווי משקל נאש במשחק.
- ▶ ב. מצאו את כל שיווי המשקל המשוכללים במשחק.



שחקן 3

		L	R
שחקן 2	U	<u>1</u> , <u>0</u> , <u>0</u>	<u>1</u> , <u>0</u> , <u>0</u>
	D	<u>1</u> , <u>0</u> , <u>0</u>	<u>1</u> , <u>0</u> , <u>0</u>

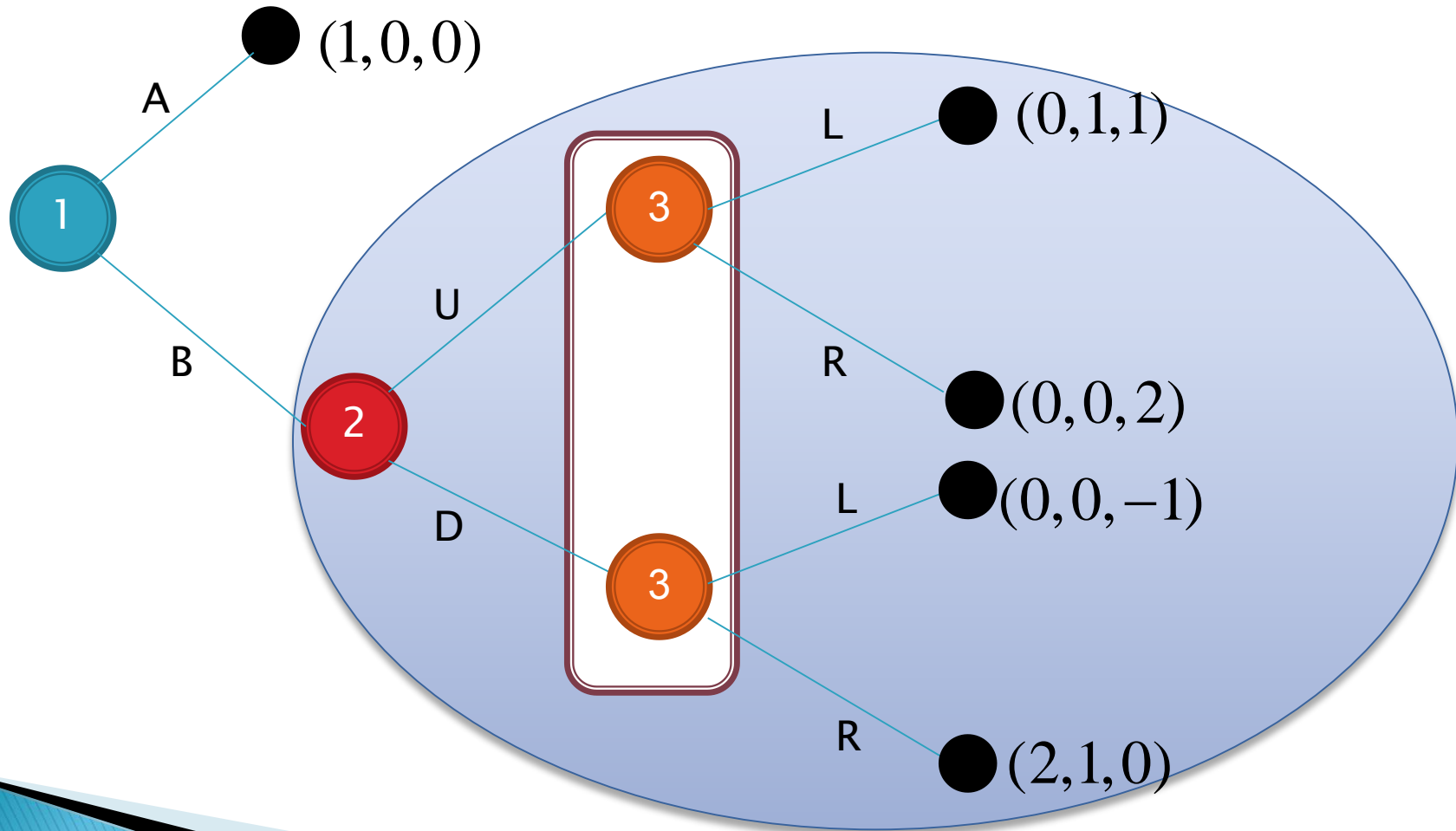
שחקן 3

		L	R
שחקן 2	U	0, <u>1</u> , 1	0, 0, <u>2</u>
	D	0, 0, -1	<u>2</u> , <u>1</u> , <u>0</u>



ישנם 4 שיווי משקל נאש במשחק:
 (A,U,L), (A,U,R), (A,D,L), (B,D,R)

- ▶ נפעיל אינדוקציה לאחור.
- ▶ קיים תת-משחק לא טריויאלי יחיד:



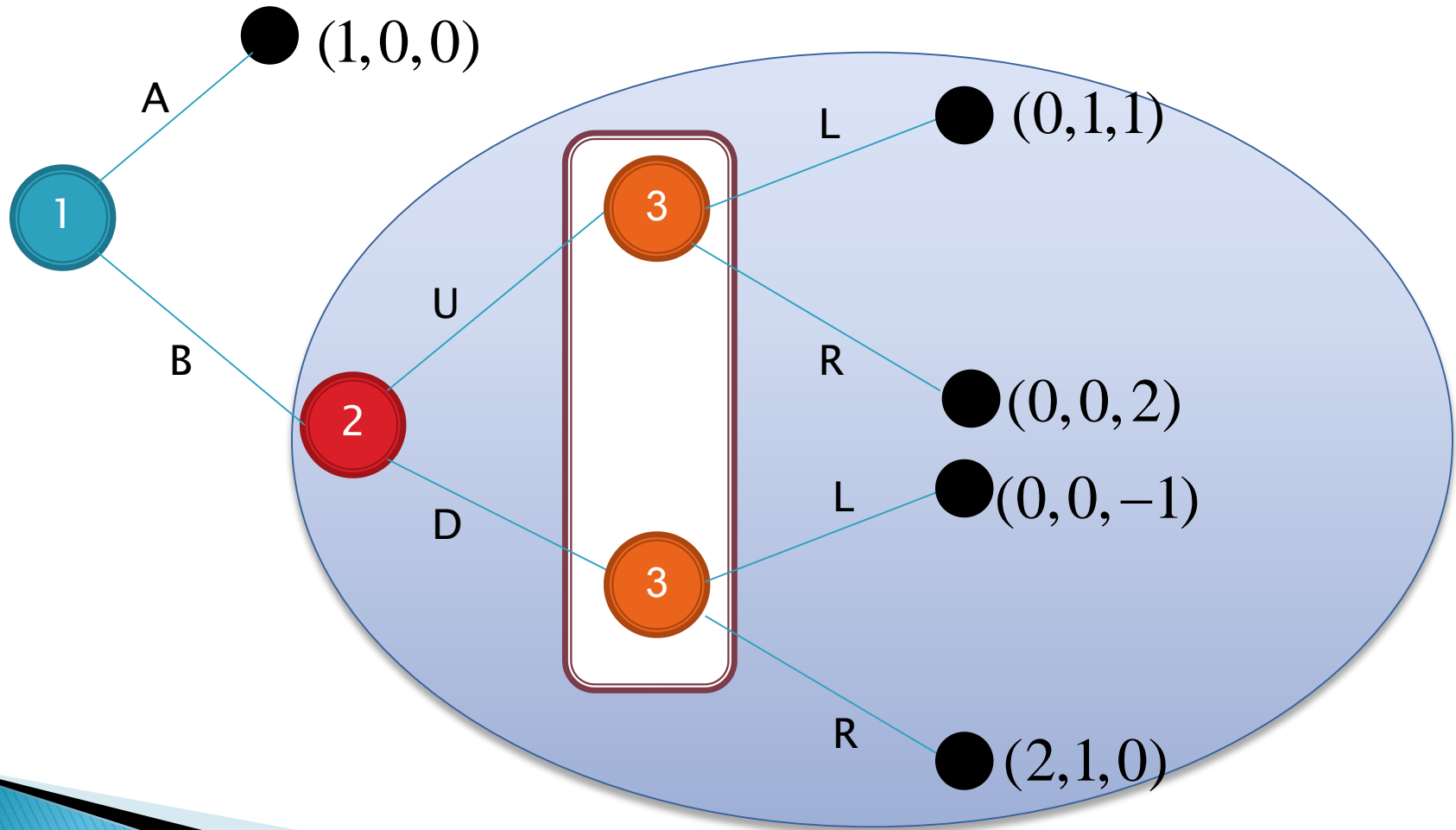
▶ ננתח את תת-המשחק בעזרת מטריצה:

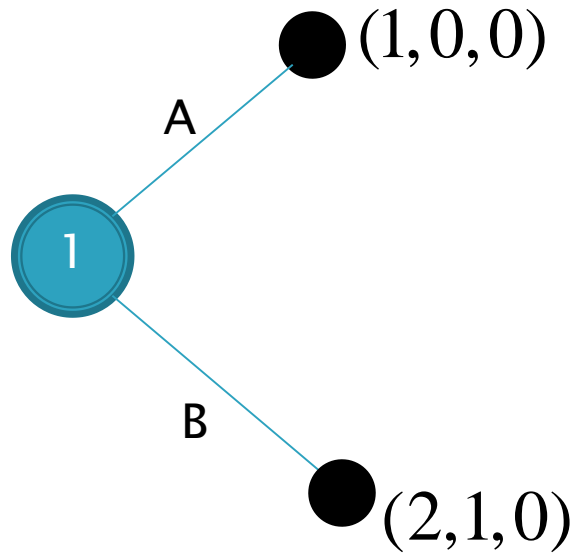
שחקן 3

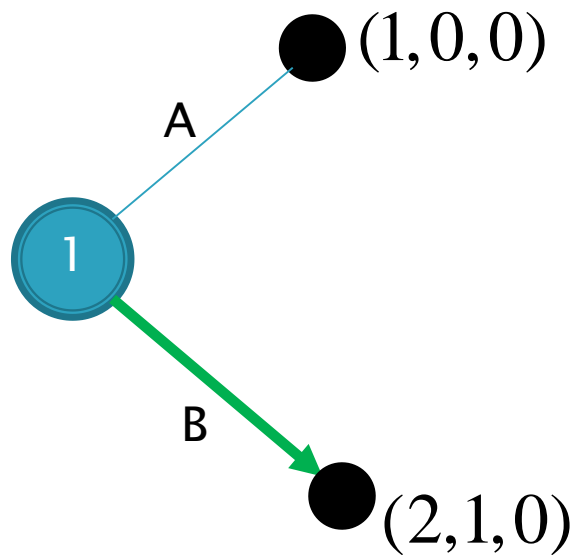
		L	R
שחקן 2	U	<u>1</u> , 1	0, <u>2</u>
	D	0, -1	<u>1</u> , <u>0</u>

▶ בתת-המשחק קיים שיווי משקל נאש יחיד: (D,R)

▶ נחליף את תת-העץ בעלה עם התשלומים של שיווי המשקל.







- ▶ קיבלנו ע"י אינדוקציה לאחור שקיים שיווי משקל משוכלל יחיד והוא (B,D,R) .
- ▶ נשים לב ששיווי משקל זה אינו פתרון טוב עבור כל השחקנים.