תרגול 10-אושרית

סדר בין עוצמות, משפט קנטור, משפט ק.ש.ב ואריתמטיקה של עוצמות

או קיימת פונקציית על מA לB

<u>תזכורת</u>: יהיו A,B קבוצות

נגיד ש- (1) $|A|\leq|B|$ אם קיימת $f:A\to B$ חח"ע

(2) $|A|=|B|$ אם קיימת $f:A\to B$ חח"ע ועל

(3) $|A|<|B|$ אם $|A|\leq|B|$ אבל $|A|\neq|B|$

תכונות משיעור קודם: 1. אם $|A|=|C|$

$|B|=|D|$

אז- $|A\times B|=|C\times D|$

2. אם $A\cap C=\emptyset$, $B\cap D=\emptyset$

וגם $|A|=|B|$

$|C|=|D|$

אז- $|A\cup C|=|B\cup D|$

3. $|\mathbb{Z}|=|\mathbb{N}|$

$|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{N}|$

$|\mathbb{N}|=\aleph_0$ -סימון!

אם $|A|\leq\aleph_0$ נגיד ש-A הוא בר מניה.

משפט קנטור שרדר ברנשטיין:

אם $|B|\le|A|$ וגם - $|A|\le|B|$ אז- $|A|=|B|$. בקצרה מכונה כק.ש.ב.

① תרגיל: $|\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}|$

1. $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Q} \Leftarrow |\mathbb{N}|\le|\mathbb{Q}|$

לפי פונק' הבכלה.

2. נבנה פונק' על $f:\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$

$(n,z)\to\frac{z}{n}$ ברור שהפונק' על כי כל איבר ב- $\mathbb{Q}$ מתצורה $\frac{a}{b}$ כאשר $a\in\mathbb{N}$, $b\in\mathbb{Z}$

$$|\mathbb{Q}|\le|\mathbb{N}\times\mathbb{Z}|=|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{N}|$$

מתכונות של תחילת השיעור

ולפי ק.ש.ב. נקבל - $|\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}|$

תרגיל: חשב את עוצמת $A=\mathbb{Q}\cap[0,1]$

פתרון:

מצד 1, $A\subseteq\mathbb{Q}$ ולכן $|A|\le\aleph_0$

מצד 2, נגדיר $B=\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}\subseteq A$ כאשר B קב' שמקיימת $|B|=\aleph_0$ קיימת פונק' חח"ע+על

$f:B\to\mathbb{N}$

$f(\frac{1}{n})=n$

ולכן נקבל $\aleph_0=|B|\le|A|$

ולכן לפי ק.ש.ב $|A|=\aleph_0$

תרגיל ממבחן:

א. יהיו A,B קב' כך ש- $|A\setminus B|=|B\setminus A|$ **הוכ:** $|A|=|B|$

ב. מצאו - קב' A,B כך ש- $|A|=|B|$ אבל - $|A\setminus B|\neq|B\setminus A|$

פתרון:

א. נשים ♡ כי - $A=(A\cap B)\cup(A\setminus B)$. $B=(A\cap B)\cup(B\setminus A)$

לפי נתון - $|A\setminus B|=|B\setminus A|$ וכן - ברור כי - $|A\cap B|=|A\cap B|$ וכן - $B\setminus A$ ו- $A\cap B$ זרות

$A\setminus B$ ו- $A\cap B$ זרות.

$\Leftarrow$ $|A|=|B|$ לפי:

תכונה 2 בתזכורות

ב. נבחר $A=\mathbb{N}$ $B=\mathbb{N}\setminus\{1\}$ ברור כי - $|A|=|B|=\aleph_0$

אבל - $A\setminus B=\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}\setminus\{1\}=\{1\}$ $\Leftarrow$ $|A\setminus B|=1$

$\neq$

$B\setminus A=\mathbb{N}\setminus\{1\}\setminus\mathbb{N}=\emptyset$ $\Leftarrow$ $|B\setminus A|=0$ ✓

הגד׳: יהיו A,B קבו׳ אזי - $A^B = \{f : f:B\to A\}$ זו קב׳ כל הפונק׳ האפשריות מ-B ל-A.

דוגמא: $|\{1,2\}^{\{1,2,3\}}| = 2^3$ אינטואיציה: מסתכלים על המס׳ 1 - יש לו 2 אפשרויות לאן להישלח

מסתכלים על המס׳ 2 - יש לו 2 אפשרויות ~~לאן~~ להישלח

מסתכלים על המס׳ 3 - יש לו 2 אפשרויות לאן להישלח.

מסקנה: אם A ו-B סופיות אז- $|A^B| = |A|^{|B|}$

מסקנה חשובה ללא הוכחה:

← כלומר: $|A|<|P(A)|$

אריתמטיקה של עוצמות:

הגד׳: יהיו 2 קבוצות A,B כך ש- $|A|=a, |B|=b$, אזי - נגדיר פעולות בין עוצמות:

1. $a+b := |A\cup B|$
2. $a\cdot b := |A\times B|$
3. $a^b := |\{f: B\to A\}|$

דוג׳:

1. $2\cdot\aleph_0$ ניקח קבוצה בת 2 איברים $\{1,2\}$ וקבוצה מעוצמה $\aleph_0$, למשל - $\mathbb{N}$ ונחשב את העוצמה של $\mathbb{N}\times\{1,2\}$

$$\{1,2\}\times\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N} \Rightarrow |\{1,2\}\times\mathbb{N}| \le \aleph_0$$

$$\underbrace{\{1\}\times\mathbb{N}}_{\sim\mathbb{N}} \subseteq \{1,2\}\times\mathbb{N} \Rightarrow \aleph_0 \le |\{1,2\}\times\mathbb{N}| \xrightarrow{\text{לפי קש״ב}} |\{1,2\}\times\mathbb{N}| = \aleph_0$$

מסקנה: $2\cdot\aleph_0=\aleph_0$

הכללה: $n\cdot\aleph_0=\aleph_0$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

הוכחת הכללה: $\aleph_0=1\cdot\aleph_0\le n\cdot\aleph_0\le\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$

טענה: יהיו a,b,c עוצמות אזי - חוקי המתמטיקה הרגילים של כפל מתקיימים -

1. $ba=ab$ (חילוף)
2. $(ab)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ (אסוציאטיביות)
3. $a^b\cdot a^c=a^{b+c}$ (חוק חזקות)
4. $(a^b)^c=a^{bc}$
5. $a^c\cdot b^c=(ab)^c$

הוכחות בשקופיות הבאות

אריתמטיקה של עוצמות:

הגד': יהיו 2 קב' זרות A,B כך ש- $|A|=a$, $|B|=b$, אזי- נגדיר פעולות בין עוצמות:

(1) $a+b:=|A\cup B|$

(2) $a\cdot b:=|A\times B|$

דוגמאות:

1. $a\cdot b=|A\times B|$ כאשר- $a=|A|$ ו $b=|B|$.
$b\cdot a=|B\times A|$. נבנה פונק' חח"ע ועל $f:A\times B\to B\times A$ כך ש- $f(a,b)=(b,a)$

2. $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ ← נבחר 3 קב' $|A|=a$, $|B|=b$, $|C|=c$.
נרצה להראות כי קיימת פונק' חח"ע ועל $f:(A\times B)\times C\to A\times(B\times C)$
$f((a,b),c)=(a,(b,c))$

פתרון סעיף 3:

4 ו5 שיעורי בית

3. נסמן - $|A|=a$, $|B|=b$, $|C|=c$.

[illegible] צ"ל: $|A^B \times A^C| = |A^{B\cup C}|$ כאשר C,B זרות.

יהי: $f \in A^{B\cup C}$ ונגדיר - $h: A^{B\cup C} \to A^B \times A^C$

$$h(f) = (f_{|B}, f_{|C})$$

נמצא פונק' הפוכה לה להראות שחח"ע + על. $g: A^B \times A^C \to A^{B\cup C}$

$$g(f_1,f_2) = \begin{cases} f_1(x) & x\in B \\ f_2(x) & x\in C \end{cases}$$

נראה כי g ו-h הופכיות:

$$(g\circ h)(f) = g(f_{|B}, f_{|C}) = \begin{cases} f_{|B}(x) & x\in B \\ f_{|C}(x) & x\in C \end{cases} = f(x)$$

$$(h\circ g)(f_1,f_2) = h(g(f_1,f_2)) = h\left[x \to \begin{cases} f_1(x) & x\in B \\ f_2(x) & x\in C \end{cases}\right) = (f_1,f_2)$$

אריתמטיקה: סכום עוצמות אינסופיות שווה למקסימום מביניהן

תרגיל: הוכח $\aleph_0+\aleph=\aleph$

פתרון:

1. לפי אריתמטיקה - $\aleph_0+\aleph=\max\{\aleph_0,\aleph\}=\aleph$
2. מפורשות: $|\mathbb{N}|=\aleph_0$ ו $|(0,1)|=\aleph$.

נרצה לחשב את העוצמה של $\mathbb{N}\cup(0,1)$.

$\mathbb{N}\cup(0,1)\subseteq\mathbb{R}$

ולכן: $|\mathbb{N}\cup(0,1)|\le|\mathbb{R}|=\aleph$

$(0,1)\subseteq\mathbb{N}\cup(0,1)$

ולכן - $\aleph=|(0,1)|\le|\mathbb{N}\cup(0,1)|$

לפי ק.ש.ב - נקבל כי - $|\mathbb{N}\cup(0,1)|=\aleph$

תרגיל: $\aleph \cdot \aleph = \aleph$

פתרון: (נניח) ♡ כי - $\aleph = 2^{\aleph_0}$

ולכן - מספיק לחשב - $2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} =$

חוקי חזקות ← $= 2^{\aleph_0} = \aleph$

משל

$a+b=\max\{a,b\}$

תרגיל: חשבו - $\aleph_0^{\aleph_0}$

פתרון:

$$2 \le \aleph_0$$

$$\aleph = 2^{\aleph_0} \le \aleph_0^{\aleph_0} \le (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\max\{\aleph_0,\aleph_0\}} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

$$|A| \le |P(A)|$$

ולכן - לפי ק.ש.ב - $\boxed{\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph}$

תרגיל: לכל עוצמה a צ"ל: $2\cdot a = a+a$

פתרון: ניקח 2 קב' זרות שמקיימות $|A|=|B|=a$

$$a+a = |A\cup B|$$

$$2\cdot a = |\{0,1\}\times A|$$

A, B מאותה עוצמה ולכן קיימת פונק' $f:A\to B$ חח"ע ועל

נגדיר $g:\{0,1\}\times A \to A\cup B$

$$\begin{cases} g(0,a)=a \\ g(1,a)=f(a) \end{cases}$$

כ"ל: הוכחנו שחח"ע - הפונק' שהגדרנו חח"ע ועל.

בהצלחה!!