תרגיל בית 6 במתמטיקה בדידה 2
83-118 סמסטר ב' תשע"ו

10 באפריל 2016

1. יהיו $k,n \in \mathbb{N}$ כאשר $0 \le k \le n$. הוכיחו בדרך קומבינטורית את הזהות הבאה:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$$

(הדרכה: נחשוב על אגף ימין כסופר את כל תתי הקבוצות של $[2n+1] = \{1,2,...,2n+1\}$ שהאיבר $2n+1$ לא שייך אליהן. נסו להתאים (באופן חח"ע ועל) בין הקבוצות הנספרות באגף שמאל לבין אלה שציינתי.)

2. הוכיחו בדרך אלגברית:

א. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$.

ב. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} = \begin{cases} -n(n-2) & n \text{ even} \\ -n^2 & n \text{ odd} \end{cases}$

3. חשבו את:

א. $\gcd(222,123)$.

ב. $\gcd(320,102)$.

4. אוקלידס מורחב: יהיו $n,m \in \mathbb{N}$ ונסמן $d = gcd(n,m)$. הוכיחו שקיימים $a,b \in \mathbb{Z}$ כך ש- $an+bm=d$. (הדרכה: במעבר האינדוקטיבי מ-$n-1$ ל- n יש להשתמש באלגוריתם אוקלידס שראינו בתרגול. ניתן להניח בה"כ $m \le n$.)