חזרה

הגדרה: תהי X קבוצה כלשהי ותהי S σ־אלגברה של תת־קבוצות של X. אז הזוג (X,S) נקרא מרחב מדיד.

הגדרה: יהי (X,S) מרחב מדיד. מידה μ על (X,S) היא פונקציה $\mu : S \to [0,\infty]$ כך ש:

א. $\mu(\emptyset) = 0$

ב. אם $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ זרות בזוגות ב־S אז $\mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

השלישיה (X,S,μ) נקראת מרחב מידה חיובית.

דוגמאות

1. מידת לבג m על אלגברת לבג $\mathscr{L}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
2. הצמצום של מידת לבג לאלגברת בורל $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.
3. מידת לבג m_n על אלגברת לבג $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$(הבנייה של m_n היא כמו הבנייה של m_1. הבאנו אותה בקיצור בשיעור הקודם.)
4. אם X קבוצה כלשהי אפשר להגדיר את "מידת הספירה" על כל $\mathcal{P}(X)$. בפרט $E \subset X$ כלשהי, מספר האיברים של E=$\mu(E)$.
5. מידת הדלתא של דירק. אם X קבוצה כלשהי ואם $x_0 \in X$ איבר בודד, אז המידה δ_{x_0} מוגדרת על $\mathcal{P}(X)$ ע"י:

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & x_0 \in E \\ 0 & x_0 \notin E \end{cases}$$

6. אם $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ הן מידות על מרחב מדיד (X,S), אז כל צירוף לינארי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\mu_n$ ($a_n \geq 0$) יוצר מידה חדשה על (X,S).

   למשל צירוף מהסוג $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\delta_{x_n}$ נותן איזו צפיפות של מסות "a_n" בנקודות x_n.
7. אם (X,S,μ) ממ"ח ואם $E \in S$ אז הצמצום של μ ל־$\mathcal{P}(E) \cap S$ זו מידה.
8. אם נחבר את שתי הדוגמאות האחרונות נוכל למשל לבנות מידת לבג משוקללת על $\mathbb{R}$, מהסוג $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, m|_{(n-1,n]}$, שכאן נתנו משקל a_n לקטע $(n-1,n]$.
9. מידה מושרית: נניח ש־(X,S,μ) ממ"ח ו־$f : X \to Y$ פונקציה כלשהי לתוך קבוצה Y. נאמר ש־$E \subset Y$ מדידה אם $f^{-1}(E) \in S$, ונגדיר מידה

$$\nu(E) = \mu\left[f^{-1}(E)\right]$$

במשפטים הבאים, (X,S,μ) מרחב מידה חיובית.

משפט 13

אם $E\subset F$ מדידות(ז.א. שייכות לS) אז $\mu(E)\leq\mu(E)$.

הוכחה

$F=E\uplus(F-E)$ ולכן $\mu(F)=\mu(E)+\underbrace{\mu(F-E)}_{\geq0}\geq\mu(E)$.

מסקנה

בנתונים של המשפט, אם $\mu(E)<\infty$ אז $\mu(F-E)=\mu(F)-\mu(E)$.

משפט 14

נניח שהקבוצות $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ שייכות לS, ונרשום $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$. אזי $\mu(E)\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$.

הוכחה

לפי משפט 9, קיימות קבוצות $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ בS שהן זרות בזוגות, כך שלכל n $F_n\subset E_n$ וגם $E=\biguplus\limits_{n=1}^{\infty}F_n$. נובע:

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$$

ע"פ משפט 13. ■

משפט 15

א. נניח ש $\cdots\subset E_3\subset E_2\subset E_1$ קבוצות בS, ונרשום $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$. אזי $\mu(E)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)$.

ב. נניח ש $\cdots\supset E_2\supset E_2\supset E_1$ קבוצות בS, ונניח ש$m(E_1)<\infty$. נרשום $E=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$. אזי

$$\mu(E)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$$

הוכחה: בתרגיל

פונקציות מדידות

תזכורת

בשיעור הראשון אמרנו שלפונקציה חסומה f על $\mathbb{R}$ אפשר לבנות סכומי לבג.

בפרט, נחלק את הטווח של f ע"י $y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n$ ונבנה "סכום לבג" $\sum_{k=1}^{n} y_k m\left(E_k\right)$ כאשר $E_k = \left\{x \in \mathbb{R} | y_{k-1} < f\left(x\right) \leq y_k\right\}$.

הגבול של סכומים אלה כאשר החלוקה נעשית עדינה ביותר הוא אינטגרל לבג $\int f \, \mathrm{d}m$.

דרישה מינימלית בשביל לבצע תכנית זו היא שלכל חלוקה ולכל k "E_k" קבוצה מדידה.

זאת מוטיבציה להגדרה של "פונקציה מדידה".

הגדרה

נגדיר $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

משפט 1

יהי (X, S) מרחב מדיד, ותהי $f : X \to \mathbb{R}^*$ פונקציה כלשהי. אזי התנאים הבאים שקולים:

א. לכל $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in X | f\left(x\right) > \alpha\} \in S$.

ב. לכל $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in X | f\left(x\right) \geq \alpha\} \in S$.

ג. לכל $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in X | f\left(x\right) < \alpha\} \in S$.

ד. לכל $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in X | f\left(x\right) \leq \alpha\}$.

אם התנאים האלה מתקיימים אז אומרים שf מדידה S(או פשוט מדידה).

הוכחה

תחילה נעיר שלכל $\alpha \in \mathbb{R}$ $\{x \in X | f\left(x\right) \leq \alpha\}^{\complement} = \{x \in X | f\left(x\right) > \alpha\}$. לכן שתי הקבוצות הנ"ל שייכות לS בו זמנית, ונובע שתנאי א' שקול לתנאי ד'.

באופן דומה רואים ש־ב' $\Longleftrightarrow$ ג'. כעת נוכיח ש־א' $\Longleftrightarrow$ ב'.

למעשה, לכל $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{x \in X | f\left(x\right) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \middle| f\left(x\right) > \alpha - \frac{1}{n}\right\}$$

לפי הנתון א' כל הקבוצות באגף ימין הן בS, וכיוון שS σ־אלגברה גם הקבוצה באגף שמאל היא בS. ז.א. לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ $\{x \in X | f\left(x\right) \geq s\} \in S$, ולכן א'$\Longleftarrow$ב'.

ב'$\Longleftarrow$א': לכל $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\{x \in X | f\left(x\right) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \middle| f\left(x\right) \geq \alpha + \frac{1}{n}\right\}$$

לפי הנתון ב' אגף ימין שייך לS. לכן גם אגף שמאל בS, והוכחנו ב'$\Longleftarrow$א'.

$\blacksquare$

מסקנה

בנתונים של משפט 1:

א. לכל $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $f^{-1}(x_0) \in S$.

ב. לכל קטע $I \subset \mathbb{R}^*$, $f^{-1}(I) \in S$.

ג. אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה אז f מדידה לבג.

הוכחה

א. $f^{-1}(x_0) = \{x \in X | f(x) \geq x_0\} \cap \{x \in X | f(x) \leq x_0\} \in S$

ב. למשל עבור קטע I מהסוג $[a, b)$:

$$f(I) = \{x \in X | f(x) \geq a\} \cap \{x \in X | f(x) < b\}$$

לשאר הקטעים ההוכחה דומה.

ג. עבור $\alpha \in \mathbb{R}$ כלשהו, $E = (\alpha, \infty)$ קבוצה פתוחה. כיוון שf רציפה, $f^{-1}(E)$ קבוצה פתוחה ולכן היא מדידה לבג. ז.א.:

$$f^{-1}(E) = \{x \in \mathbb{R} | f(x) > \alpha\} \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$$

וf מדידה לבג.

משפט 2

יהי (X, S) מרחב מדיד, יהיו $f : X \to \mathbb{R}$ ו$g : X \to \mathbb{R}$ פונקציות מדידות S, ויהי $c \in \mathbb{R}$ קבוע. אזי:

א. $f \pm g$ מדידה S.

ב. cf מדידה S.

ג. fg מדידה S.

הוכחה

א. (לגבי $f+g$) ניקח $\alpha\in\mathbb{R}$ כלשהו ונתבונן בקבוצה $\{x\in\mathbb{R}|f(x)+g(x)<\alpha\}$.
ובכן, אם עבור $x\in\mathbb{R}$ $f(x)+g(x)<\alpha$ אז $f(x)<\alpha-g(x)$. בהכרח קיים $r\in\mathbb{Q}$ כך ש$f(x)<r<\alpha-g(x)$.

לכן נטען טענה:

$$\{x\in\mathbb{R}|f(x)+g(x)<\alpha\}=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\{x\in\mathbb{R}|f(x)<r\}\cap\{x\in\mathbb{R}|g(x)<\alpha-r\}$$

הוכחת הטענה: אם x מוכל באגף שמאל אז כנ"ל

$$f(x)+g(x)<\alpha \implies f(x)<\alpha-g(x) \implies$$

$\Longleftarrow$ קיים $r\in\mathbb{Q}$ כך ש$f(x)<r<\alpha-g(x)$ $\Longleftarrow$ $g(x)<r$ וגם $g(x)<\alpha-r$, ולכן x מוכל באגף ימין.

ולהיפך: אם x מוכל באגף ימין אז $f(x)<r$ וגם $g(x)<\alpha-r$. נחבר אי שוויונים להסיק $f(x)+g(x)<\alpha$, וx מוכל באגף שמאל.

בזה הוכחנו את הטענה.

כעת, נתון שf וg מדידות ולכן עבור כל $\alpha\in\mathbb{R}$ ו$r\in\mathbb{Q}$, $\{x|f(x)<r\}$ ו$\{x|g(x)<\alpha-r\}$ מדידות. יוצא שאגף ימין איחוד בן מנייה של קבוצות מדידות והיא מדידה.

ההוכחה ש$f-g$ מדידה דומה.

ב. אם $c>0$ אז לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ $\{x|cf(x)<\alpha\}=\left\{x\middle|f(x)<\frac{\alpha}{c}\right\}$ שהיא מדידה.

אם $c<0$ אז לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ $\{x|cf(x)<\alpha\}=\left\{x\middle|f(x)>\frac{\alpha}{c}\right\}$ שהיא מדידה.

אם $c=0$ אזי $cf(x)\equiv 0$ שהיא מדידה.

ג. תחילה נניח $g=f$, ונוכיח שאם f מדידה אז f^2 מדידה. ובכן: אם $\alpha\le 0$, $\left\{x\middle|f^2(x)<\alpha\right\}=\emptyset\in S$, ואם $\alpha>0$, $\left\{x\middle|f^2(X)<\alpha\right\}=\{x|-\sqrt{\alpha}<f(x)<\sqrt{\alpha}\}$ כי f מדידה.

במקרה הכללי פשוט נרשום $fg=\frac{1}{4}\left((f+g)^2-(f-g)^2\right)$ שהיא מדידה לפי סעיף א', סעיף ב', והמקרה הפרטי של f^2.

■

הערה לגבי $f:X\to\mathbb{R}^*$ ו$g:X\to\mathbb{R}^*$

$f(x)+g(x)$ לא מוגדרת כאשר $f(x)=+\infty$ ו$g(x)=-\infty$ או להיפך. כמו כן $f(x)-g(x)$ לא מוגדקרת כאשר $f(x)=+\infty$ וגם $g(x)=+\infty$ או ש$f(x)=g(x)=$ $-\infty$, ו$f(x)g(x)$ לא מוגדרת כאשר $f(x)=0$ ו$g(x)=\pm\infty$ או להיפך.

אבל אם f וg מדידות בS ואם נסכים שבכל הנקודות הבעייתיות הנ"ל $f\pm g$ ו$f-g$ יקבלו אותו ערך(למשל 0) בכולם אז קל להוכיח ש$f\pm g$ וfg מדידות.

המשפט הבא יאמר שאם $\{f_n\}$ סדרת פונקציות מדידות אז $\sup f_n, \inf f_n, \overline{\lim} f_n, \underline{\lim} f_n$ מדידות.

תזכורת

אם $\{a_n\}$ סדרה ב$\mathbb{R}$(או ב$\mathbb{R}^*$) יש שתי הגדרות שקולות ל$\overline{\lim}a_n$. בפרט: $\overline{\lim}a_n$=הגבול החלקי המקסימלי של הסדרה=$\inf\limits_k \sup\limits_{n\geq k} a_n$.

לסדרת פונקציות $\{f_n(x)\}$, $\overline{\lim}f_n(x)$ מחושב נקודתית.

דוגמה

$x\in\mathbb{R}\setminus$ $f_n(x)=x^n$. נחשב:

$$\overline{\lim}f_n(x)=\begin{cases}+\infty & x<-1\\ 1 & x=-1\\ 0 & x\in(-1,1)\\ 1 & x=1\\ \infty & x>1\end{cases} \qquad \underline{\lim}f_n=\begin{cases}-\infty & x<-1\\ -1 & x=-1\\ 0 & x\in(-1,1)\\ 1 & x=1\\ \infty & x>1\end{cases}$$

משפט מאינפי 1

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ קיים(במובן הרחב) $\iff$ $\underline{\lim}a_n=\overline{\lim}a_n$.

משפט 3

יהי (X,S) מרחב מדיד, ותהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות $f_n:X\to\mathbb{R}^*$ שמדידות S.
אזי $\underline{\lim}f_n(x),\overline{\lim}f_n(x),\inf f_n(x),\sup f_n(x)$ מדידות S ואם קיים $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ היא מדידה S.

הוכחה

תחילה נגדיר $f(x)=\sup f_n(x)$ ונעיר שלכל $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\{x\in X|f(x)\leq\alpha\}=\{x\in X|\forall_n f_n(x)\leq\alpha\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\in X|f_n(x)\leq\alpha\}$$

שהוא חיתוך בן מנייה של קובצות מדידות. הדבר נכון לכל $\alpha\in\mathbb{R}$, ולכן f מדידה. ואם נגדיר $g(x)=\inf f_n(x)$ אז לכל $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\{x\in X|g(x)\geq\alpha\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\in X|f_n(x)\geq\alpha\}$$

שהיא מדידה.

כעת נגדיר $h(x)=\overline{\lim}f_n(x)=\inf\limits_k\sup\limits_{n\geq k}f_n(x)$. לכל $k\in\mathbb{N}$ נגדיר $g_k(x)=\sup\limits_{n\geq k}f_n(x)$. לפי מה שהוכחנו כבר כל $g_k(x)$ מדידה. מיד נובע ש$h(x)=\inf\limits_k g_k(x)$ אף היא מדידה.

באופן דומה רואים ש$\underline{\lim} f_n(x) = \sup_k \inf_{n\geq k} f_n(x)$ מדידה.

ואם $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ קיים אז הוא שווה $\overline{\lim} f_n(x)$ שהיא מדידה.

$\blacksquare$

אינטגרל לבג הכללי

בפרק זה מדובר תמיד בממ"ח (X,S,μ).

עבור $f: X\to\mathbb{R}^*$ מדידה נבנה בשלבים $\int_X f\,\mathrm{d}\mu$.

נתחיל עם הפונקציות המדידות האלמנטריות ביותר: עבור $E\in S$ נגדיר אינדיקטור $I_E: X\to\mathbb{R}$ ע"י $I_E(x) = \begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$.

תרגיל פשוט לראות שI_E פונקציה מדידה $\iff$ E קבוצה מדידה.

השלב הבא הוא להגדיר "פונקציות פשוטות" שהן מדידות $\varphi: X\to\mathbb{R}$ שמקבלות מספר סופי של ערכים.

אם למשל φ מקבלת את הערכים $a_1,a_2,\dots a_n$, אז עבור $1\leq k\leq n$ נגדיר $E_k = \{x\in X | \varphi(x) = a_k\}$.

כיוון שφ מדידה כל $E_k \in S$ מדידה, ואז $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}(x)$.

הסבר: ניקח $x\in X$ כלשהו. אז $\varphi(x) = a_{k_0}$ שזה אחד הערכים $a_1,a_2,\dots a_n$. ממילא $x\in E_{k_0}$ ועבור $k\neq k_0$, $x\notin E_k$. נובע שבנקודה x

$$\sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}(x) = \sum_{k\neq k_0}^{n} a_k \underbrace{I_{E_k}(x)}_{=0} + a_{k_0}\underbrace{I_{E_{k_0}}(x)}_{=1} = a_{k_0} = \varphi(x)$$

ההצגה הנ"ל $\sum a_k I_{E_k}$ היא "ההצגה הקנונית" של φ, אבל למעשה כל פונקציה פשוטה ניתנת ל∞ הצגות כצירופים לינאריים של אינדיקטורים.

למשל:אם $\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ נתון ע"י $\varphi(x) = I_{[0,1]}(x)$, גם $\varphi(x) = I_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}(x) + I_{\left(\frac{1}{2},1\right]}(x)$ וגם $\varphi(x) = 2I_{[0,1]}(x) - I_{\left[0,\frac{1}{2}\right)}(x) - I_{\left[\frac{1}{2},1\right]}(x)$.

הערה

אם φ וψ פונקציות פשוטות ואם $c\in\mathbb{R}$ קבוע אז $\varphi\pm\psi$, $c\varphi$ ו$\varphi\psi$ פשוטות, כי כולן פונקציות מדידות בעלות מספר סופי של ערכים.

הגדרה

עם הצגה קנונית $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$ אז נגדיר $\int_X \varphi\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k)$, כאשר מוסכם שאם איזה $a_k = 0$ ואותו E_k מקיימת $\mu(E_k) = \infty$, אז $a_k\mu(E_k) = 0$.

הערה

בהמשך נתמקד בפונקציות פשוטות ולא שליליות $\varphi : X \to [0,\infty]$, אז תמיד האינטגרל מוגדר היטב כמספר ב$[0,\infty]$.