אלגברה לינארית 2 (88113) – תשובות לשאלון לדוגמא

מרצים: פרופ' רון עדין, פרופ' בוריס קוניאבסקי.
מתרגלים: עופר בוסאני, שירה גילת, עדי לוגסי, תמר נחשוני.

בהצלחה !

פרק א'

.1

א. למשל, חיוביות:

$$\langle (v_1,v_2,v_3),(v_1,v_2,v_3)\rangle = 2v_1^2-2v_1v_2+v_2^2+v_3^2 = v_1^2+(v_1-v_2)^2+v_3^2 \geq 0$$

ושוויון אםם $v_1=v_2=v_3=0$.

ב. למשל: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,2,0),(0,0,1)\right\}$, או $\{(0,1,0),(1,1,0),(0,0,1)\}$.

ג. $W_3=\text{span}\{(1,2,0)\}$, $W_4=\text{span}\{(1,1,0)\}$.

ד. בא"נ עבור W_1: $\{(0,1,0),(1,1,0)\}$

בא"נ עבור W_2: $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$

בא"נ עבור W_3: $\{(0,0,1)\}$

בא"נ עבור W_4: $\{(1,1,0)\}$

ה. ההטלה הניצבת על W_1: $(1,2,0)$

ההטלה הניצבת על W_2: $(0,1,3)$

ההטלה הניצבת על W_3: $(0,0,3)$

ההטלה הניצבת על W_4: $(1,1,0)$

.2

א. בסיס אורתונורמלי סדור: $E=\big((0,1,0),(1,1,0),(0,0,1)\big)$.

הצגת T בבסיס זה:

$$[T]_E^E=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ב. הצגת T^* בבסיס הנ"ל:

$$[T^*]_E^E=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$T^*(v_1,v_2,v_3)=(-v_1+v_2,-2v_1+v_2,v_3)$$

ג. T נורמלי ואורתוגונלי.

ד. פולינום אופייני = פולינום מינימלי = $(x-1)(x^2+1)$.

ה. T לא ניתן לשילוש ולא ניתן ללכסון (המרחב הוקטורי הוא מעל $\mathbb{R}$).

ו. T לא ניתן לשילוש אורתוגונלי ולא ניתן ללכסון אורתוגונלי.

פרק ב'

.3

א. לא נכון: $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

ב. נכון: זה נכון למטריצה אלכסונית (הדרגה היא מספר אברי האלכסון השונים מאפס), ולכן גם למטריצה הדומה לאלכסונית.

ג. נכון: הפולינום האופייני (או המינימלי) מאפס את A, והאיבר החופשי בו אינו אפס. נכפיל ב- A^{-1}.

.4

א. $A=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&a^n\\1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}$

ב. $n=2,\ a\neq 0$ (שימו לב שמדובר בלכסון מעל $\mathbb{R}$).

ג. $P=\begin{pmatrix}a&-a\\1&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}a&0\\0&-a\end{pmatrix}$.

.5

א. באי"נ עבור W: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),\frac{1}{\sqrt{6}}(-i,2,i)\right\}$.

באי"נ עבור $W^{\perp}$: $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-i,-1)\right\}$.

ב. ההטלה הניצבת על W: $\frac{1}{3}(2,i,1)$.

ההטלה הניצבת על $W^{\perp}$: $\frac{1}{3}(1,-i,-1)$.

ג. הוכחה א:

אם $v_1\in W$ אז $(P-Q)(v_1)=P(v_1)-Q(v_1)=v_1-0=v_1$

ולכן $(P-Q)^2(v_1)=(P-Q)(v_1)=v_1$

אם $v_2\in W^{\perp}$ אז $(P-Q)(v_2)=P(v_2)-Q(v_2)=0-v_2=-v_2$

ולכן $(P-Q)^2(v_2)=(P-Q)(-v_2)=v_2$

מכיוון ש- $V=W\oplus W^{\perp}$ נקבל שאכן $(P-Q)^2(v)=v$ לכל $v\in V$.

הוכחה ב:

$P^2=P$ (כי P הטלה), $Q^2=Q$ (כי Q הטלה), $P+Q=I$ (כי P, Q הטלות על מרחבים משלימים), $PQ=QP=0$ (מאותה סיבה). לכן

$(P-Q)^2=P^2-PQ-QP+Q^2=P+Q=I$