21.08.24

תירגול 11

שגיאת אינטרפולציה

$$f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

Next Term Rule

הערכת השגיאה ע"י הפולינום "המתוקן", כאשר נוסף לו נקודה נוספת.

תרגיל: הערכות שגיאת האינטרפולציה של הפונקציה $f(x)$ עבור הערך $f(1.25)$ עבור פולינום מדרגה שלישית בהסתמך על הנקודות הבאות:

x	$f(x)$
1	1
1.1	1.233
1.2	1.55
1.3	1.99
1.4	2.611

פתרון: נרצה לחשב פולינום מדרגה 3, לשם כך נשתמש ב- 4 הנקודות הראשונות:

x	f				
1	$\boxed{1}$	$\boxed{2.33}$	$\boxed{4.26}$	$\boxed{6.105}$	7.65
1.1	1.233	3.19	6.099	9.165	
1.2	1.55	4.41	8.848		
1.3	1.99	6.1798			
1.4	2.611				

$$P_3(x)=1+2.33\cdot(x-1)+4.26(x-1)(x-1.1)$$
$$+6.105(x-1)(x-1.1)\cdot(x-1.2)$$

1

$P_3(1.25)=\boxed{1.7557}$

פולינום מדרגה 3 $\Leftarrow$

$$P_4(x)=P_3(x)+7.65(x-1)(x-1.1)(x-1.2)(x-1.5)$$

$$= 7.65 \cdot x^4 + \boxed{\text{פולינום מדרגה } 3}$$

$$P_4^{(4)} = 4! \cdot 7.65$$

$$E = |f - P_3(x)| = \frac{4! \cdot 7.65}{4!} \cdot \left|(x-1)(x-1.1)(x-1.2)(x-1.3)\right|$$

$$E(1.25) \le 7.65 \ (1.25-1)(1.25-1.1)(1.25-1.2)(1.25-1.3) =$$
$$= \boxed{7.1719 \cdot 10^{-4}}$$

פולינום צ'ביצ'ב

הרעיון: נרצה להקטין את השגיאה ע"י בחירה מתאימה של הנקודות x_i.

הגדרה: $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$

$x \in [-1, 1]$

דוגמא: $T_0(x) = 1$

$T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x$

ל-$T_n(x)$ יש n שורשים

הגדרה רקורסיבית:

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$$\boxed{T_{n+1}(x) = 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x)}$$

השורשים של $T_n(x)$:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad k = 0, 1, \ldots n-1$$

$$\underbrace{\prod_{i=0}^{n-1} |x - x_i|} \le \frac{1}{2^n}$$

הפולינומים של צ'ביצ'ב הם אורתוגונליים בקטע $[-1,1]$
עם פונקציית משקל: $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ניתן להוכיח ש:

$$\langle T_i, T_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{\pi}{2} & i=j\neq 0 \\ \pi & i=j=0 \end{cases}$$

מכפלה פנימית

אם נרצה למצוא פונקציית אינטרפולציה בצורה חסם השגיאה מינימלי בקטע כלשהו $[a,b]$ נבצע טרנספורמציה ליניארית מ- $x\in[-1,1]$ ל- $t\in[a,b]$.

$$t=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cdot x$$

במקרה כזה:
$$\prod_{i=0}^{n-1}|t-t_i|\le 2\cdot\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$$

דוגמא: נרצה לקרב את $f(x)=\sin x$ ע"י פולינום אינטרפולציה בקטע $[0,3]$ כך שהשגיאה האינטרפולציה לא תעלה על 0.1.
כמה נקודות דגימה יש לקחת? ומהן?

פתרון: נניח שנרצה למצוא פולינום אינטרפולציה ממעלה N:

$$|f(x)-P_N(x)|\le\frac{M_{N+1}}{(N+1)!}\,2\cdot\left(\frac{b-a}{4}\right)^{N+1}$$

$$M_{N+1}=\max_{\xi\in\square} f^{(N+1)}(\xi)$$

$$f(x)=\sin x \Rightarrow \overset{\forall N}{f^{(N)}(x)\le 1}$$

$$\Rightarrow E\le\frac{1}{(N+1)!}\cdot 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{N+1}\le 0.1$$

ננחש ונבדוק. נמצא ש- $N=3$ מקיים את המשוואה.
ולכן צריך 4 נקודות דגימה כדי לבנות את פולינום האינטרפולציה. שהם השורשים של T_4.

$$x_k=\cos\left(\frac{2k+1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\quad k=0,1,2,3$$

$x_0=0.92388$

$x_1=0.383$

$x_2=-0.383$

$x_3=-0.12388$

נעבור לקטע $[3,6]$:

$$t=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}x$$

$t_0=5.886$

$t_1=5.074$

$t_2=3.926$

$t_3=3.114$

תרגיל: א. מצא תנאי מספיק שהשגיאת האינטרפולציה של פונקציה f בקטע $[a,b]$ שואפת ל-0, כאשר מספר נקודות הדגימה שואף לאינסוף (בהנחה שנקודות הדגימה הן נקודות צ'בישב).

ב. האם הפונקציה $f(x)=\sin(2x)$ בקטע $[-100,100]$ מקיימת את התנאי?

ג. האם הפונקציה $f(x)=\frac{1}{3x}$ בקטע $[1,2]$ מקיימת את התנאי?
ובקטע $[-100,100]$.

פתרון:

א. השגיאה נתונה:

$$E=\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\cdot\prod_{i=0}^{N}|x-x_i| \le 2\cdot\left(\frac{b-a}{4}\right)^{N+1}$$

התנאי:

$$\boxed{E=\frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}\cdot 2\cdot\left(\frac{b-a}{4}\right)^{N}\xrightarrow{N\to\infty}0}$$

ב. $f(x)=\sin 2x$

$$f^{(n)}(x)\le 2^n\cdot 1=2^n$$

$$E\le\frac{2^N}{N!}\cdot 2\cdot\left(\frac{200}{4}\right)^N=\frac{2\cdot 100^N}{N!}\xrightarrow{N\to\infty}\boxed{0}$$

4

והפולינום מתכנס לפונקציה.

המש"ך

ג.

$$f(x)=\frac{1}{3x}=\frac{1}{3}\cdot x^{-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}\cdot(-1)\cdot x^{-2}$$

$$|f^{(n)}(x)|\le \frac{1}{3}\cdot n!\cdot\frac{1}{x^{n+1}}$$

$$E\le \frac{\frac{1}{3}\cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}}\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \boxed{0}$$

ב. $[1,10]$

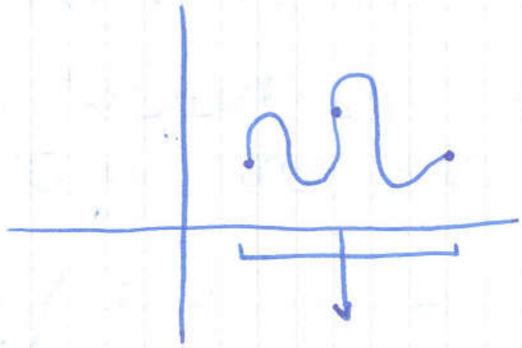
$$|f^{(n)}(x)|=\frac{1}{3}\cdot n!\cdot\frac{1}{x^{n+1}}\le\frac{1}{3}n!$$

$$E\le\frac{\frac{1}{3}\cancel{n!}}{\cancel{n!}}\cdot 2\cdot 25^n\xrightarrow{n\to\infty}\infty$$

$$\not\to 0$$

Cubic Spline

מבוא:



מטרה: נרצה לייצר פולינום אינטרפולציה, כך שבין כל 2 נקודות נתונות יווצר פולינום ממעלה 3 והפולינום הכללי יהיה בעל 2 נגזרות רציפות.

נתונות הנקודות:

(x_0,y_0)

(x_1,y_1)

$\vdots$

(x_n,y_n)

נסמן $h_i=x_{i+1}-x_i$

a_i - הנגזרת השניה בנק' ה-i. לאחר פיתוח נקבל:

$$S_i(x) = a_i \cdot \frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} + a_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i}$$

$\uparrow$
הפולינום
בין $[x_i, x_{i+1}]$

$$+\left(\frac{y_i}{h_i} - a_i \cdot \frac{h_i}{6}\right)(x_{i+1}-x) +$$

$$+\left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - a_{i+1}\cdot\frac{h_i}{6}\right)\cdot(x-x_i)$$

כאשר הפרמטרים a_i (ונקצ"י):

$$a_{i-1} + h_i + a_i \cdot 2(h_i + h_{i+1}) + a_{i+1}\cdot h_{i+1} =$$

$$= 6\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)$$

$$i = 1, \dots, n-1$$

במצב זה יש לנו $n+1$ נעלמים רק עם $n-1$ משוואות.

עבור natural cubic spline נניח $a_0 = a_n = 0$
כדי למצוא את ה-a_i נקבל את המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) & h_n \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

6

$n+1$ משוואות עם $n+1$ נעלמים $\Leftarrow$ נמצא את a_i.

בס"ד

תרגיל: נתונות הנקודות:

	0	1	2	3	4
x	-1	0	1	2	3
y	4	1	2	6	5

מצא פולינום אינטרפולציה

natural cubic spline

העובר דרך הנקודות.

ההפרשים בין ה-x-ים

$$h_i = 1 \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נפתור את מערכת המשוואות ונקבל:

$$a_0 = a_4 = 0$$

$$a_1 = 4.6$$

$$a_2 = 5.6$$

$$a_3 = -8.9$$

$$-1 \le x \le 0$$

$$S_0 = \frac{4.6}{6} \cdot (x+1)^3 - 4x + \left(1 - \frac{4.6}{6}\right)(x+1)$$

$$S = \begin{cases} S_0 & -1 \le x \le 0 \\ S_1 & 0 \le x \le 1 \\ S_2 & 1 \le x \le 2 \\ S_3 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

קפ"ב **תרגיל:** נתון:

$$S(x)=\begin{cases} \overset{S_0}{1-x+ax^2+x^3} & 0\le x\le 1 \\ \overset{S_1}{3+bx+cx^2-x^3} & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

מצא את a,b,c כך ש- $S(x)$ יהיה natural cubic spline באינטרוול $[0,2]$.

$$S_0(1)=S_1(1)$$
$$S_0'(1)=S_1'(1)$$
$$S_0''(1)=S_1''(1)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a+1=2+b+c \\ -1+2a+3=b+2c-1 \\ 2a+6=2c-6 \end{cases}$$

$$b=-1;\ a-c=-6$$

טבעי:

$$S_0''(0)=0$$
$$S_1''(2)=0$$
$$S_0''(0)=2a=0 \Rightarrow \boxed{a=0}$$
$$S_1''(2)=2c-12=0 \Rightarrow \boxed{c=6} \Rightarrow \boxed{b=-1}$$