

השלמה להרצאה בנושא תהליך גרס-שמידט

בועז צבאן

2 בינואר 2012

כיון שבשיעור הקרוב הכתות ילמדו יחד והכתה השניה הספיקה מעט יותר בשיעור האחרון, אני משלים לכם את הפרטים החסרים כאן, וכן מוסיף מידע על מה שאמרתי בהרצאה.

1 השלמת בא"נ של תת-מרחב לבא"נ של המרחב כולו

למה 1.1 יהיו וקטורים מאונכים מאפס, בממ"פ. לכל $v \in \{v_1, \dots, v_k\}^\perp$ מתקיים $\pi_{\{v_1, \dots, v_k\}}(v) = \vec{0}$.

הוכחה: מיידית מההגדרה:

$$\pi_{\{v_1, \dots, v_k\}}(v) = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \dots + \frac{\langle v, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k = \frac{0}{\|v_1\|^2} v_1 + \dots + \frac{0}{\|v_k\|^2} v_k = \vec{0}$$

משפט 1.2 יהי V ממ"פ, ויהי $W \subseteq V$ תת-מרחב. כל בא"נ $\{v_1, \dots, v_k\}$ של W ניתן להשלים לבא"נ $\{v_1, \dots, v_k, \dots, v_n\}$ של V כולו.

הוכחה: נשלים את v_1, \dots, v_k לבסיס כלשהו $v_1, \dots, v_k, \dots, v_n$ של V . נפעיל את תהליך גרס-שמידט על הבסיס $v_1, \dots, v_k, \dots, v_n$ לקבל בסיס אורתוגנלי $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k, \dots, \hat{v}_n$, וננרמל את הוקטורים שהתקבלו, לקבל בא"נ $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k, \dots, \tilde{v}_n$ של V . נראה, באינדוקציה על i , שלכל $i = 1, \dots, k$ מתקיים $\tilde{v}_i = v_i$ (ולכן הבא"נ שהתקבל מרחיב את הבא"נ הנתון של W).

$i = 1$: מהגדרת תהליך גרס-שמידט, $\hat{v}_1 = v_1$. כיון ש v_1 נורמלי (כאיבר של בא"נ של W), נירמולו אינו משנה אותו, כלומר $\tilde{v}_1 = v_1$. נניח נכונות הטענה עבור $i = 1, \dots, i$ ($i < k$) ונוכיחה עבור $i + 1$: מהגדרת תהליך גרס-שמידט ומהנחת האינדוקציה ($\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_i = v_1, \dots, v_i$), וכיון ש v_{i+1} מאונך ל v_1, \dots, v_i (בהיותם יחד חלק מבא"נ של תת-מרחב), נקבל מהלמה לעיל ש

$$\hat{v}_{i+1} = v_{i+1} - \pi_{\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_i\}}(v_{i+1}) = v_{i+1} - \pi_{\{v_1, \dots, v_i\}}(v_{i+1}) = v_{i+1} - \vec{0} = v_{i+1}$$

כיון ש v_{i+1} כבר נורמלי, נירמולו לא ישנה אותו, ונקבל ש $\tilde{v}_{i+1} = v_{i+1}$.

2 אי-שיוון בסל ואי-שיוון קושי-שוורץ

משפט 2.1 (אי-שיוון בסל) יהיו וקטורים אורתונורמלים בממ"פ V . אזי לכל $v \in V$:

$$\|v\|^2 \geq |\langle v, v_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, v_k \rangle|^2 \quad 1.$$

2. שיוון מתקיים ב (1) אם ורק אם $v \in \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$.

הוכחה: המשפט הקודם, אפשר להשלים את v_1, \dots, v_k לבא"נ v_1, \dots, v_n של V .

(1) מממשפט פיתגורס,

$$\|v\|^2 = |\langle v, v_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, v_k \rangle|^2 + |\langle v, v_{k+1} \rangle|^2 + \dots + |\langle v, v_n \rangle|^2 \geq |\langle v, v_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, v_k \rangle|^2$$

(2) אם $v \in \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$, אז מממשפט פיתגורס, $\|v\|^2 = |\langle v, v_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, v_k \rangle|^2$.

מצד שני, נניח ש $\|v\|^2 = |\langle v, v_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, v_k \rangle|^2$. מממשפט פיתגורס, נקבל

$$|\langle v, v_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, v_k \rangle|^2 = \|v\|^2 = |\langle v, v_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, v_k \rangle|^2 + |\langle v, v_{k+1} \rangle|^2 + \dots + |\langle v, v_n \rangle|^2$$

ולכן $|\langle v, v_{k+1} \rangle|^2 + \dots + |\langle v, v_n \rangle|^2 = 0$ ולכן $|\langle v, v_{k+1} \rangle|^2 = \dots = |\langle v, v_n \rangle|^2 = 0$ ולכן $\langle v, v_{k+1} \rangle = \dots = \langle v, v_n \rangle = 0$. כיון ש v_1, \dots, v_n בא"נ של V ,

$$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle v, v_k \rangle v_k + \langle v, v_{k+1} \rangle v_{k+1} + \dots + \langle v, v_n \rangle v_n =$$

$$= \langle v, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle v, v_k \rangle v_k + 0v_{k+1} + \dots + 0v_n = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle v, v_k \rangle v_k \in \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$$

משפט 2.2 (אי-שוויון קושי-שוורץ) יהי V מ"פ. לכל $u, v \in V$ מתקיים:

$$1. |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

2. שוויון מתקיים ב (1) אם ורק אם u, v תלויים לינארית.

הוכחה: עבור $v = \vec{0}$ הטענה ברורה: $|\langle u, \vec{0} \rangle| = |\langle \vec{0}, u \rangle| = 0 = \|\vec{0}\| \cdot \|u\|$.
 לינארית. נותר להוכיח את הטענה כאשר $v \neq \vec{0}$.

יהי $v_1 := \frac{1}{\|v\|}v$. מאי-שוויון בסל, מתקיים $\|u\|^2 \geq |\langle u, v_1 \rangle|^2$ ושוויון אם ורק אם $u \in \text{span}\{v_1\}$.

(1) כיון $\|u\|^2 \geq |\langle u, v_1 \rangle|^2$, נקבל $\|u\| \geq |\langle u, v_1 \rangle|$ (הביטויים אינם שליליים, ולכן אין צורך להוסיף להם ערך מוחלט). לכן,

$$\|u\| \geq \left| \left\langle u, \frac{1}{\|v\|}v \right\rangle \right| = \left| \frac{1}{\|v\|} \langle u, v \rangle \right| = \frac{1}{\|v\|} |\langle u, v \rangle|$$

(השתמשנו בכך ש $0 < \frac{1}{\|v\|}$ ובפרט ממשי, וכמו-לינאריות של מ"פ ברכיב השני, ובכפוליות של ערך מוחלט). נכפול את שני האגפים ב $\|v\|$ ונקבל את הדרוש.

(2) אם $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$ אז

$$\|u\| = \frac{1}{\|v\|} |\langle u, v \rangle| = \left| \frac{1}{\|v\|} \langle u, v \rangle \right| = \left| \left\langle u, \frac{1}{\|v\|}v \right\rangle \right| = |\langle u, v_1 \rangle|$$

ולכן $\|u\|^2 = |\langle u, v_1 \rangle|^2$. מאי-שוויון בסל, $u \in \text{span}\{v_1\}$. כיון ש v_1 מתקבל מ v על ידי כפל בסקלר שונה מ 0, $\text{span}\{v_1\} = \text{span}\{v\}$.

הכיוון ההפוך גם הוא נובע מאי-שוויון בסל בצורה דומה, אך נוכיחו ישירות: נניח ש $u = \alpha v$. אז

$$|\langle u, v \rangle| = |\langle \alpha v, v \rangle| = |\alpha \langle v, v \rangle| = |\alpha| \|v\|^2 = (|\alpha| \|v\|) \|v\| = \|\alpha v\| \|v\| = \|u\| \|v\|$$

■