הערות נא לשלוח למייל dvir1352@gmail.com

# חשבון אינפיניטסמלי I

שיעור חזרה לקבוצה 07 – תיכוניסטים (ד"ר שמחה הורוביץ)

שאלה: נתונים הטורים: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ לא מתכנס בהחלט ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ אותם איברים בסדר אחר. צריך להוכיח כי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ אינו מתכנס בהחלט.

תשובה: משפט א: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט ואם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתקבל מ$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ע"י שינוי סדר בלבד אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בהחלט ומתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

משפט ב: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור שמתכנס בתנאי ויהי $-\infty \le L \le M \le \infty$ אזי קיים טור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ המתקבל מ$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ע"י שינוי סדר בלבד כך שאם $S_N$ הם הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ אז $limsup S_N = M, liminf S_N = L$.

שאלה: נתונה פונקציה $g(x)$ על $(0,\infty)$ כך שלכל x>0 וכל $n \in N$ מתקיים $g(x^n) = ng(x)$ וגם $g'(1)$ קיים. צריך להוכיח שקיים קבוע $c$ כך ש $g(x) = c\ln x$ לכל $x \in (0,\infty)$.

תשובה: גישוש: פורמלית $\frac{d}{dx} ng(x) = \frac{d}{dx} g(x^n)$ ולכן $g'(x^n)nx^{n-1} = ng'(x)$.

המרצה לא הצליח. לא יופיע במבחן.

פתרון של מתן בן דב: קודם כל, נוכיח שהנתון נכון עבור n רציונאלי. מתקיים ע"פ הנתון $g\left(x^{\frac{a}{b}}\right) = ag\left(x^{\frac{1}{b}}\right)$, כעת גם כן מתקיים $g(x) = g\left(\left(x^{\frac{1}{b}}\right)^b\right) = bg\left(x^{\frac{1}{b}}\right)$ ועל כן,(חילוק בb והצבה) מתקבל $g\left(x^{\frac{a}{b}}\right) = \frac{a}{b} g(x)$.

נגדיר פונקציה $f_n(x) = \frac{g(x^n)-g(1)}{x^n-1}$. עבור n רציף, לא טבעי, הוא מצא פתרון. נשאיף את n ל0. מתקיים $f_n(x) \to_{n\to 0} g'(1)$ וגם ידוע כי $g(1) = ng(1)$ לכל $n$ לכן g(1)=0. נציב הכל ונקבל $g(x) = \frac{f_n(x)(x^n-1)}{n}$ ועבור $n$ שואף ל0 מתקבל $g(x) = g'(1)\ln x$.

שאלה: f(x) מוגדרת ורציפה לכל x ממשי. צריך להוכיח כי אם קיים $\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{x^n} = L$ אזי קיימים קבועים c וb כך שמתקיים כי $|f(x)| \le b + c|x|^n$

(המרצה צחק ואמר שאולי זה יופיע במבחן)

תשובה: הוכחה: עבור $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^n} = L$ קיים $x_1 > 0$ כך שאם $x > x_1$ אזי $\left|\frac{f(x)}{x^n}\right| \le |L| + 1$.

ועבור $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x^n} = L$ ולכן קיים $x_0 < 0$ כך שאם $x < x_0$ אזי $\left|\frac{f(x)}{x^n}\right| \le |L| + 1$.

בקטע הנותר, $[x_0, x_1]$, משפט ויירשטרס אומר שf חסומה (כי היא רציפה בקטע סגור) ז.א. שקיים m>0 עבור $x \in [x, x_0]$ כך ש$|f(x)| \le M$.

יוצא לכל x ממשי $|f(x)| \le M + (|L|+1)|x|^n$ ומצאנו את הb,c שנדרשו.

שאלה: תהי f(x) פונקציה בעלת חמש נגזרות רציפות בכל הממשיים. נתון שמתקיים $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(4)}(0) = 0$ גם נתון ש$f^{(5)}(0) > 0$ ואם $x \ne 0$ מתקיים $f'(x) \ne 0$. להוכיח שאם x>0 אז f(x)>0.

תשובה: עבור x>0 זה או חיובי או שלילי כי $f'(x) \ne 0$. צריך להכריע עכשיו כי הנגזרת עבור x>0 חיובית. איך נעשה זאת? נביא בנתון לגבי הנגזרות, וגם נעזר בטיילור. כיוון ש$f^{(5)} > 0$ וגם הנגזרת הf5 רציפה אזי קיים n>0 כשבקטע $[0,n]$ מתקיים $f^{(5)}(x) > 0$. כעת אם $x \in [0,n]$ טיילור אומר כי $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 = 0+0+0+0+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 > 0$. הוכחנו שבקטע $[0,n]$ מתקיים f(x)>0.

טענה: f(x)>0 לכל x>0.

הוכחת הטענה: נתון שלכל x>0 $f'(x) \ne 0$. נובע ממשפט ערך הביניים שמתקיים אחד משני תנאים:

א. $f'(x)>0$ לכל x>0.

ב. $f'(x)<0$ לכל x<0.

אם (א) מתקיים f עולה ממש בקטע וכיוון שf(0)=0 הרי ש f(x)>0 לכל x>0. ואם (ב) מתקיים הרי f(x)<0 לכל x>0 וכיוון שמצאנו קטע שבו f(x)>0 בהכרח תנאי (א) נכון וf(x)>0 לכל x>0.

שאלה: נתונה סדרה $\{a_n\}$ וצריך להוכיח כי היא שואפת לאפס או"א לכל תת סדרה $\{a_{n_k}\}$ קיימת תת סדרה $\left\{a_{n_{k_j}}\right\}$ כך ש $\sum_{j=1}^{\infty} a_{n_{k_j}}$ מתכנס בהחלט.

פתרון: כיוון אחד: $\Longrightarrow$: אם מתקיים התנאי אזי $a_n$ שואף ל0. נוכיח זאת בדרך השלילה. ידוע כי קיימת תת סדרה $\{a_{n_k}\}$ ששואפת לגבול אחר שאינו 0. לפי זה עבור כל התת סדרה $\left\{a_{n_{k_j}}\right\}$ של $\{a_{n_k}\}$ הטור $\sum_{j=1}^{\infty} a_{n_{k_j}}$ מתבדר, בסתירה.

כיוון שני: $\Longleftarrow$: נתון שהסדרה שואפת ל0. ונקח תת סדרה כלשהי $\{a_{n_k}\}$ אז $\{a_{n_k}\}$ גם כן שואפת ל0. נובע מהגדרת ההתכנסות שלכל j טבעי ישנם אינסוף איברים $a_{n_k}$ כך ש$|a_{n_k}|<\frac{1}{j^2}$ ופרט יש אינדקס $n_k$ כך ש$|a_{n_{k_1}}|<1$ וכיוון שיש אינסוף איברים קיים $|a_{n_k}|<\frac{1}{4}$ בוודאי קיים אינדקס $n_{k_2}>n_{k_1}$ כך ש$|a_{n_{k_2}}|<\frac{1}{4}$ כמו כן יש אינסוף איברים כך ש $|a_{n_{k_3}}|<\frac{1}{9}$ ובדרך זו אפשר למצוא תת סדרה שלמה כך שלכל j $\left|a_{n_{k_j}}\right|<\frac{1}{j^2}$, ולכן הוא מתכנס בהחלט, כדרוש.

שאלה: f(x) וg(x) גזירות לכל x ממשי ומקיימות לכל x כי $f'(x)g(x)\neq f(x)g'(x)$ וצריך להוכיח כי אם $f(x_1)=f(x_2)=0$ אז קיים $c\in(x_1,x_2)$ כך ש$g(c)=0$.

תשובה: הוכחה בדרך השלילה: נניח כי $g(x)\neq 0$ לכל $x\in[x_1,x_2]$ אם כן f/g מוגדרת וגזירה בקטע. נגדיר $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ ומתקיים כי $h(x_1)=0, h(x_2)=0$. לפי רול קיימת נקודה בה $h'(c)=0$ אבל $h'(x)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}\neq 0$ לפי הנתון, בסתירה לרול.

מ.ש.ל.

שאלה: תהי f מונוטונית בקטע [a,b] שמקיימת את תנאי ערך הביניים. הוכיחו כי f רציפה [a,b].

תשובה: נוכיח בדרך השלילה. נניח שקיים $x_0$ שבו f לא רציפה. לפי משפט קיימים $\lim_{x\to x_0^+} f(x), \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ הם לא שווים, וכיוון שf עולה, בלי הגבלת הכלליות, מתקיים $\lim_{x\to x_0^+} f(x)>\lim_{x\to x_0^-} f(x)$. מאחר וf עולה, לכל $a\le x<x_0$ מתקיים $\lim_{x\to x_0^-} f(x)\ge f(x)$ ועבור $x_0<x\le b$ מתקיים $\lim_{x\to x_0^+} f(x)\le f(x)$.

השכלה כללית (באינפי!): נניח ש*f(x)* מוגדרת בסביבה של $x_0$ ורציפה ב$x_0$ ונניח ש$f(x_0)>0$. הוכיחו שקיימת סביבה *S* של $x_0$ כך שלכל *x* ששייך ל*S* מתקיים *f(x)>0*.

הוכחה: כיוון שf רציפה ב$x_0$ מתקיים $f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$ ונבחר $\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}>0$. לפי הגדרת הרציפות קיים $\delta>0$ כך שעבור $|x-x_0|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}$ ז"א שלכל x בסביבה מתקיים $\frac{\varepsilon f(x_0)}{2}>f(x)>\frac{f(x_0)}{2}>0$ בפרט עבור *f(x)>0* בסביבה זו. מ.ש.ל.

שאלה: לחשב: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\ln x}}{\ln^x x}$.

תשובה: ע"פ לופיטל ננסה לפתור, כי מדובר במצב של $\frac{\infty}{\infty}$. מתקבל $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\ln^2 x}}{e^{x\ln(\ln x)}}$, מכאן מומלץ לבצע סוג של מעבדה, להציב ולראות מה קורה במספרים גדולים. קיבלנו כי המכנה גדול משמעותית מהמונה, ולכן הגבול הוא 0.

טענה: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{xlnlnx}=0$. לפי לופיטל $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{xlnlnx}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2lnx}{x}}{lnlnx+x\frac{1}{lnx}\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2lnx}{xlnlnx+\frac{x}{lnx}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{lnlnx+\frac{1}{lnx}+\frac{lnx-1}{\ln^2 x}}\to 0$.

שאלה: הוכח/הפרך: תהי $f:[0,1]\to R$ פונקציה גזירה. אם $f'(x)>7$ לכל $x\in[0,1]$ ואם $f(0)=-3$ אז $f(1)>2$.

הערות נא לשלוח למייל dvir1352@gmail.com

תשובה : לפי לגרנג' קיים $c \in (0,1)$ כך ש $7 < f'(c) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f(1)+3$ ולכן $4 < f(1)$.

שאלה : נתון $n>1$ $f$ גזירה $n+1$ פעמים. וגם $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$ וגם $f^{(n)}=5$. חשבו $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{[\sin 2x]^n}$.

תשובה : $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{[\sin 2x]^n} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)\ (2x)^n}{(2x)^n\,[\sin 2x]^n} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{[2x]^n} = \frac{1}{2^n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n} \underbrace{=}_{\substack{\text{חשוב לבדוק}\\ \text{אחרי כל שלב}\\ \text{שמותר לבצע לופיטל}}} \frac{1}{2^n}\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{5}{2^n}$.

שאלה : $f,g$ גזירות . קיים $c$ ממשי כך שלכל $x<c$ מתקיים $f'(x)=g'(x)$. הוכיחו כי $f'(c)=g'(c)$.

תשובה : מתקיים כי $(f-g)(x)=k$ ולכן $f(x)=g(x)+k$. מאחר והן רציפות, $f(c) = \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^-} g(x)+k = g(c)+k$.
כעת $f'(c) = \lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c^-}\frac{g(x)+k-[g(c)+k]}{x-c} = \lim_{x\to c^-}\frac{g(x)-g(c)}{x-c} = g'(c)$. מ.ש.ל.

שאלה : חשב $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}-ctgx\right]$

תשובה : $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}-ctgx\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}-\frac{cosx}{sinx}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{sinx-xcosx}{xsinx}$ ועי"י לופיטל 3 פעמים נקבל את הגבול.

שאלה : $\sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\left[e^{\frac{1}{n^2}}-1\right]\sqrt{n^4-8}$. מתבדר/מתכנס בהחלט/על תנאי.

תשובה : נגדיר $\sum_{n=10}^{\infty} b_n = \sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{nln(n)}$, $\frac{1}{\ln n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\left[e^{\frac{1}{n^2}}-1\right]\sqrt{n^4-8} = a_n$ שני הטורים חיוביים. לפי מבחן ההשוואה הגבולי מספיק להוכיח שקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} > 0$ ואז הם מתבדרים יחד או מתכנסים יחד. ידוע כי $\sum_{n=10}^{\infty} b_n$ מתבדר, כעת נוכיח כי $\sum_{n=10}^{\infty} a_n$ גם כן. מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\left[e^{\frac{1}{n^2}}-1\right]\sqrt{n^4-8}}{\frac{1}{nln(n)}} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right]\left[\frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{\frac{1}{n^2}}\right]\left[\frac{\sqrt{n^4-8}}{n^2}\right] > 0$!!!.