מערך תרגול 8 אינפי 1 למדמ"ח

תזכורת 8.1 נקודה c נקראת מקסימום גלובאלי של פונקציה f אם לכל x בתחום ההגדרה מתקיים

$$f(x) \leq f(c)$$

בדומה מגדירים מינימום גלובאלי.

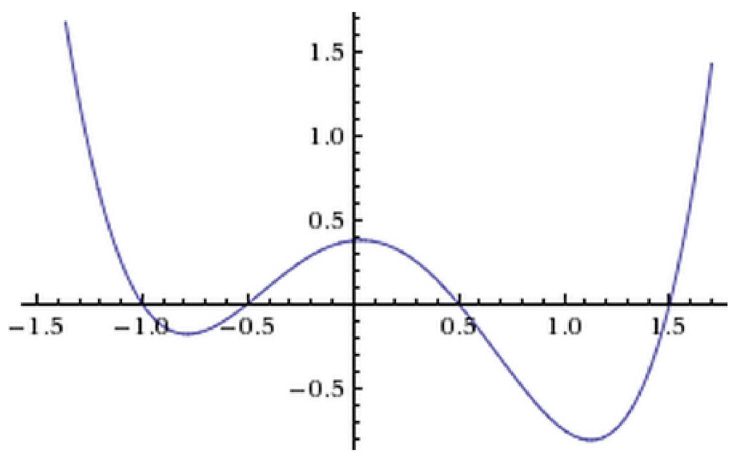
תזכורת 8.2 נקודה c נקראת מקסימום מקומי/לוקלי של פונקציה f אם קיימת סביבה (a,b) של c כך שלכל $x \in (a,b)$ בתחום ההגדרה של f מתקיים

$$f(x) \leq f(c)$$

בדומה מגדירים מינימום מקומי.

הערה 8.3 שימו לב שכל מינימום גלובאלי הוא גם מינימום מקומי.

דוגמא 8.4 נסתכל על הפונקציה



יש לפונקציה זו שתי נקודות מינימום מקומי, נקודת מקסימום מקומי אחד.אבל יש לה מינימום גלובאלי אחד ואין לה מקסימום גלובאלי.

מטרה: בהינתן פונקציה. איך מוצאים את נקודות הקיצון שלה?

תזכורת 8.5 (משפט הנקודה הקריטית) אם c היא נקודת קיצון (מקומית) של f אז אחד הדברים הבאים חייב לקרות:

1. $f'(c) = 0$
2. f אינה גזירה ב c.

3. c היא נקודת קצה של הקטע.

נקודה שמקיימת את אחד המצבים הנ"ל נקראת נקודה קריטית.

דוגמא 8.6 נדגים את כל המצבים הללו

1. אם $f(x)=x^2$ אז $x=0$ היא נקודת מינימום ובה באמת $f'(0)=0$.
2. אם $f(x)=|x|$ אז $x=0$ היא נקודת מינימום ובה f אינה גזירה.
3. אם $f(x)=x$ בתחום ההגדרה $[0,1]$ אז $x=0$ היא נקודת מינימום והיא נקודת קצה תחום.

שלב ראשון במציאת נקודות קיצון: מציאת כל הנקודות הקריטיות של הפונקציה. בדר"כ זה לא כל כך קשה. אחר כך צריך להבין איזה מהן מקסימום/מינימום ואיזה סתם הסתפחו.
יש שתי דרכים מקובלות לעשות את זה:

תזכורת 8.7

1. (המבחן הישיר) נניח ש c היא הנקודה הקריטית היחידה של f בקטע (a,b) מסוים. אז אפשר לקחת $u,v\in(a,b)$ כך ש $u<c<v$ ואז:
   (א) אם $f(u),f(v)\le f(c)$ אז c היא נקודת מקסימום גלובאלי בקטע (a,b).
   (ב) אם $f(u),f(v)\ge f(c)$ אז c היא נקודת מינימום גלובלי בקטע (a,b).
   (ג) אחרת c אינה נקודת קיצון.
2. (מבחן הנגזרת השניה) נניח ש c נקודה קריטית של f ונניח ש f גזירה פעמיים ב c.
   (א) אם $f''(c)<0$ אז c נקודת מקסימום מקומי של f.
   (ב) אם $f''(c)>0$ אז c נקודת מינימום מקומי של f.
   (ג) אם $f''(c)=0$ לא ניתן לקבוע (ייתכן ש c נקודת קיצון וייתכן שלא).

ועוד תזכורת שימושית אחת:

משפט 8.8 (ווירשטראס). לפונקציה רציפה המוגדרת על קטע סגור קיימים מינימום ומקסימום גלובאליים.

תרגיל 8.9 מצאו מינימום ומקסימום גלובאלי ולוקאלי עבור

$$f(x)=\sin x+x$$

בתחום $[0,2\pi]$.

פתרון: ראשית נמצא נקודות קריטיות. אין נקודות שבהן הפונקציה לא גזירה. יש נקודות קצה $x = 0, 2\pi$. נחפש נקודות בהן הנגזרת מתאפסת

$$f'(x) = \cos x + 1$$

נקבל שזה מתאפס כאשר

$$\cos x = -1$$

כלומר

$$x = \pi$$

לכן בסך הכל הנקודות הקריטיות הן $x = 0, \pi, 2\pi$.
נתחיל לחפש נקודות קיצון גלובאליות. לפי משפט ווירשטראס אנחנו יודעים שקיימים מינימום ומקסימום גלובאליים. הם גם בפרט לוקליים ולכן חייבים להיות נקודות קריטיות. נבדוק את ערכי הפונקציה בנקודת הקריטיות:

$$f(0) = 0 \quad f(\pi) = \pi \quad f(2\pi) = 2\pi$$

ולכן $x = 0$ הוא מינימום גלובאלי ו $x = 2\pi$ הוא מקסימום גלובאלי.
נחפש נקודות קיצון לוקליות: כמובן ש $x = 0$ הוא מינימום לוקלי ו $x = 2\pi$ הוא מקסימום לוקלי. נותר לבדוק האם $x = \pi$ קיצון? בקטע $(0, \pi)$ זאת הנקודה הקריטית היחידה,לכן אפשר לקחת

$$u = \frac{\pi}{2} \quad v = \frac{3\pi}{2}$$

ולשים לב ש

$$f(\frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{\pi}{2}, \quad f(\frac{3\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} - 1$$

קל לבדוק ש

$$f(u) < f(\pi) < f(v)$$

ולכן $x = \pi$ אינה נקודת קיצון כלל.

נשים לב שכאן הנגזרת השנייה לא הייתה עוזרת לנו כי

$$f''(x) = -\sin x$$

ו

$$f''(\pi) = 0$$

תרגיל 8.10 מצאו את הנקודה על העקום $y = 1 - 4x$ שמרחקה מראשית הצירים הוא הקטן ביותר.

תשובה: הנקודות על הישר הן $(x, 1-4x)$ המרחק של נקודה כזו מראשית הצירים הוא:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (1-4x)^2}$$

לכן אנחנו בעצם מחפשים נקודת מינימום (גלובאלית) עבור הפונקציה d. כאן יש טריק נחמד. לפונקציה d יהיה ערך מינימום בדיוק באותה נקודה שבה לפונקציה

$$(d(x))^2 = x^2 + (1-4x)^2$$

יהיה ערך מינימום. לכן אפשר לעבוד עם הפונקציה

$$f(x) = x^2 + (1-4x)^2$$

שהיא יותר נוחה. נחפש נקודות קריטיות: אין נקודות קצה. אין נקודות שבהן הפונקציה לא גזירה. נחפש נקודות שבהן הנגזרת מתאפסת

$$f'(x) = 2x + 2(1-4x) \cdot (-4) = 2x - 8 + 32x$$

כלומר

$$f'(x) = 0$$

אומר ש

$$34x = 8$$

כלומר

$$x = \frac{4}{17}$$

נשים לב שזו נקודה קריטית יחידה ב $\mathbb{R}$. ניקח

$$u = 0, \quad v = 1$$

ונשים לב ש

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 10$$

ולכן $x = \frac{4}{17}$ היא נקודת מינימום גלובאלי. והנקודה שאנחנו מפשים היא:

$$(\frac{4}{17}, \frac{1}{17})$$

נעבור לחקירת פונקציות מלאה:

הגדרה 8.11 1. פונקציה f היא קמורה בקטע I אם לכל $x, y \in I$ כך ש $x < y$ הישר המחבר את $(x, f(x))$ ו $(y, f(y))$ נמצא מעל הפונקציה.
בניסוח מתמטי: לכל $0 \le \alpha \le 1$ מתקיים

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

2. פונקציה f היא קעורה בקטע I אם לכל $x,y \in I$ כך ש $x<y$ הישר המחבר את $(x,f(x))$ ו $(y,f(y))$ נמצא מתחת הפונקציה.
בניסוח מתמטי: לכל $0 \le \alpha \le 1$ מתקיים

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y) \ge \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

דוגמא 8.12 x^2 היא פונקציה קמורה ו $-x^2$ היא פונקציה קעורה.

משפט 8.13 (ללא הוכחה) נניח ש f גזירה פעמיים בכל נקודה פנימית של קטע I .

1. אם $f''(c)>0$ בכל נקודה c פנימית של הקטע אזי f קמורה.
2. אם $f''(c)<0$ בכל נקודה c פנימית של הקטע אזי f קעורה.

הגדרה 8.14 c נקראת נקודת פיתול של f אם מצד אחד שלה הפונקציה קעורה ומצד שני שלה הפונקציה קמורה.

בהינתן פונקציה $f(x)$ נדרש למצוא את הדברים הבאים:

1. נקודות קיצון לוקליות וגלובאליות.
2. תחומי עליה וירידה. (הפונקציה עולה כאשר $f'(x)>0$ ויורדת כאשר $f'(x)<0$)
3. תחומי קמירות וקעירות. (הפונקציה קמורה כאשר $f''(x)>0$ וקעורה כאשר $f''(x)<0$)
4. נקודות פיתול (נקודות שבהן יש מעבר מקמירות לקעירות או להפך)
5. שרטוט של הפונקציה.

תרגיל 8.15 חקרו את הפונקציה

$$f(x)=\frac{2x}{x+1}$$

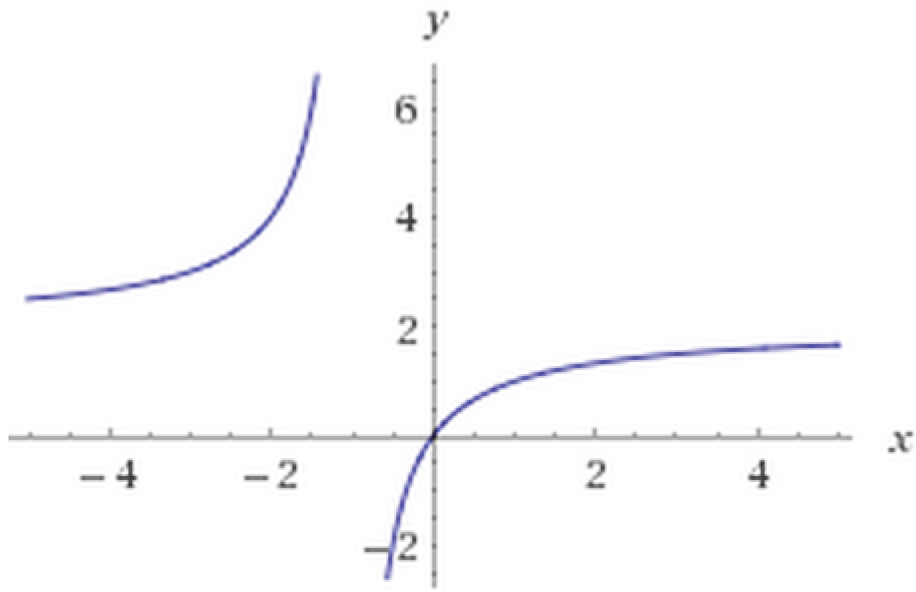
פתרון: נחפש נקודות קריטיות. אין נקודות קצה, הפונקציה גזירה בכל תחום הגדרתה, נחפש נקודות שבהן הנגזרת מתאפסת

$$f'(x)=\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

משמע הנגזרת תמיד חיובית. לכן אין נקודות קריטיות ולכן אין נקודות קיצון והפונקציה תמיד עולה. נבדוק קמירות וקעירות

$$f''(x)=\frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}$$

לכן f קמורה כאשר $x < -1$ וקעורה כאשר $x > -1$. (אני לא הייתי קורא ל $x = -1$ נקודת פיתול כי f לא מוגדרת בה בכלל, אבל אני לא חושב שיש מוסכמה לגבי זה).
ציור:



תרגיל 8.16 חקרו את הפונקציה $f(x) = \sin x + \cos x$ בתחום $[0, 2\pi]$

תשובה: נתחיל בלמצוא נקודות קריטיות. הפונקציה גזירה בכל נקודה. $0, 2\pi$ הן נקודות קצה. נותר למצוא נקודות בהן הנגזרת מתאפסת

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

כלומר הנגזרת מתאפסת בנקודות בהן

$$\cos x = \sin x$$

היות שהתחום שלנו הוא $[0, 2\pi]$ זה קורה ב $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$. לפונקציה חייבים להיות מינימום ומקסימום גלובאליים לפי משפט ווירשטראס ולכן איזשהן נקודות קריטיות הן מינימום ומקסימום גלובאליים. נסתכל על השיעורים שלהן:

$$f(0) = 1, \quad f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}, \quad f(\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2}, \quad f(2\pi) = 1$$

לכן $x = \frac{\pi}{4}$ מקסימום גלובאלי (ולוקלי) ו $x = \frac{5\pi}{4}$ מינימום גלובאלי (ולוקלי). יש לציין שאפשר לראות שהם מינימום ומקסימום לוקליים גם לפי הנגזרת השנייה

$$f''(x) = -\sin x - \cos x$$

$$f''(\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2} < 0, \quad f''(\frac{5\pi}{4}) = \sqrt{2} > 0$$

נבין את תחומי העלייה וירידה: הפונקציה עולה כאשר $f'(x) > 0$ וזה קורה כאשר $\cos x >$ $\sin x$ כלומר זה קורה בתחום

$$[0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$$

ובהתאמה הפונקציה יורדת ב $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$. מכאן גם ברור לנו ש$x = 0$ היא מינימום לוקלי ו $x = 2\pi$ מקסימום לוקלי.

נבדוק קמירות וקעירות:

$$f''(x) = -\sin x - \cos x$$

אם חושבים על זה רגע מבינים שזה שלילי בתחום

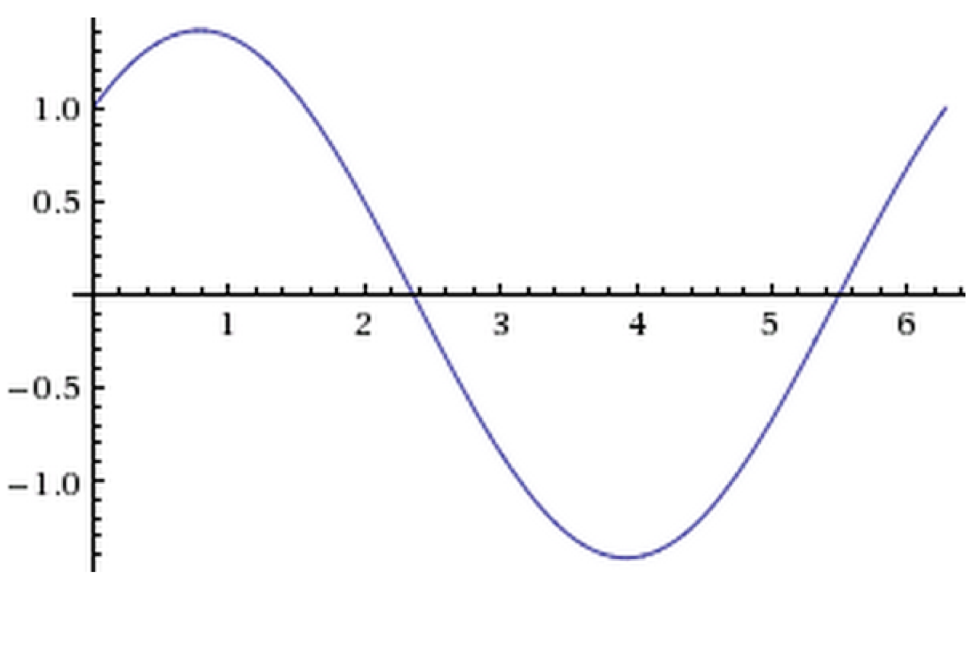
$$[0, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$$

ולכן בתחום זה הפונקציה קעורה ותחום הקמירות הוא:

$$(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$$

מכאן גם נבין ש $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ הן נקודות הפיתול.

ציור:



תרגיל 8.17 חקרו את הפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{x} + x$$

פתרון: נתחיל בלמצוא נקודות קריטיות. הפונקציה גזירה בכל תחום הגדרתה ואין נקודות קצה. נותרנו עם נקודות שבהן הנגזרת מתאפסת.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

כלומר הנגזרת מתאפסת ב $x = \pm 1$. נסווג קיצון לוקאלי לפי מבחן הנגזרת השנייה:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

כלומר

$$f''(1) = 2 > 0, \quad f''(-1) = -2 < 0$$

כלומר $x = -1$ מקסימום לוקלי. ו $x = 1$ מינימום לוקלי. (הם לא קיצון גלובאלי)
נבין תחומי עליה וירידה:

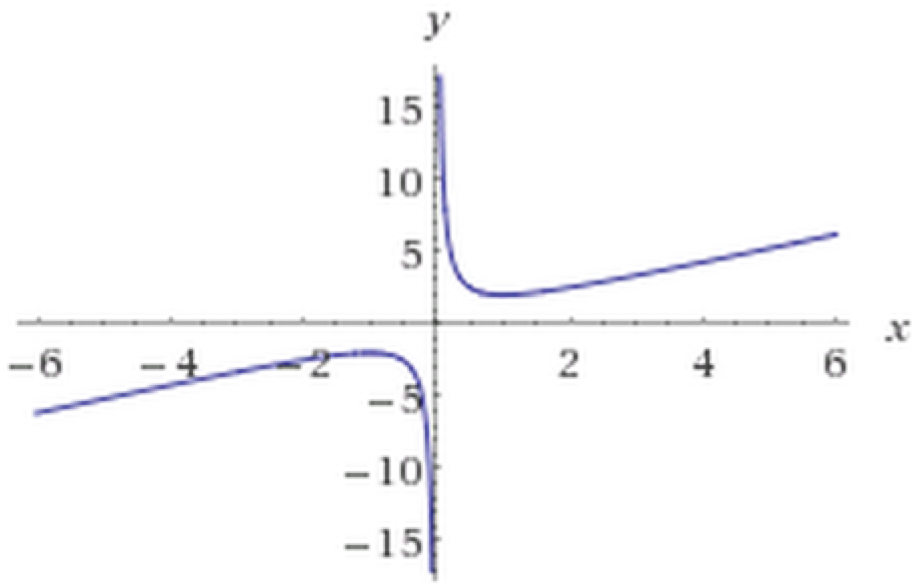
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

ולכן הפונקציה יורדת בתחום $(-1, 0) \cup (0, 1)$ ועולה ב $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
נבין תחומי קמירות וקעירות:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

ולכן הפונקציה קמורה ב $(0, \infty)$ וקעורה ב $(-\infty, 0)$, כמו קודם לא הייתי קורא ל $x = 0$ נקודת פיתול.

ציור:



תזכורת 8.18 (משפט ערך הביניים) אם f רציפה בקטע $[a,b]$ ו $f(a) < 0 < f(b)$ או $f(b) < 0 < f(a)$ אז קיים $c \in (a,b)$ כך ש $f(c) = 0$.

תרגיל 8.19 הוכיחו כי למשוואה $1 + x^3 = 3x$ קיים לפחות פתרון אחד בתחום $[1,\infty)$.

פתרון: נגדיר $f(x) = 1 - 3x + x^3$. הפונקציה מתאפסת ב c אם ורק אם c פתרון למשוואה. נשים לב ש

$$f(1) = -1, \quad f(2) = 3$$

ולכן קיים $c \in (1,2)$ כך ש $f(c) = 0$ כנדרש.

תרגיל 8.20 בהמשך לשאלה הקודמת, הראו כי למשוואה $1 + x^3 = 3x$ יש בדיוק פתרון אחד בקטע $[1,\infty)$.

פתרון: שוב נגדיר

$$f(x) = 1 - 3x + x^3$$

ונשים לב ש

$$f'(x) = -3 + 3x^2$$

ובתחום שלנו $f'(x) > 0$. אם הפונקציה הייתה חותכת את ציר x פעמיים אז לפי משפט רול. הייתה נקודה שבה הנגזרת מתאפסת וזו סתירה.
הסבר אחר: כלומר הפונקציה (רציפה) ועולה ולכן היא לא יכולה לחתוך את ציר x פעמיים.

תרגיל 8.21 הוכיחו כי למשוואה הבאה

$$\sin x - 2\cos x = 0$$

קיימים לפחות שני פתרונות בקטע $[0, 2\pi]$.

פתרון: נגדיר

$$f(x) = \sin x - 2\cos x$$

נשים לב ש

$$f(0) = -2, \quad f(\pi) = 1$$

ולכן קיים $c_1 \in (0, \pi)$ כך ש

$$f(c_1) = 0$$

כלומר c_1 הוא פתרון למשוואה.
כמו כן,

$$f(\pi) = 1, \quad f(2\pi) = -2$$

ולכן קיים $c_2 \in (\pi, 2\pi)$ שהוא פתרון למשוואה. קיבלנו שני פתרונות כנדרש.