אינדוקציה

הוכחה בעזרת אינדוקציה מסתכם בשלושה שלבים

1. בדיקה הטענה עבור n התחלתי לרוב עבור $n=1$.
2. הנחה שהטענה נכונה עבור n.
3. הוכחת הטענה, בעזרת ההנחה, עבור $n+1$.

הרעיון של אידוקציה דומה לאבני דומינו נופלים אחד אחרי השני, כדי שכל אבני הדומינו יפלו צריך שיתקיים:

1. שהאבן הראשונה תיפול. (שקול לבדיקת הטענה)
2. בהינתן שהאבן ה-n נופלת ידוע בוודאות שהאבן ה-$n+1$ נופלת. (שקול להוכחה של 3 בעזרת 2).

דוגמה. הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

פתרון.

1. בדיקה עבור $n=1$

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$

קבלנו פסוק אמת.

2. הנחה עבור n: נניח שמתקיים

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. הוכחה עבור $n+1$: צריך הוכיח שמתקיים

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

הבה נוכיח זאת בעזרת ההנחה

$$
\begin{aligned}
1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 &\overset{*}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left[2n^2+7n+6\right]}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}
$$

*הנחת האינדוקציה.
סיימנו.

תרגיל. תהי $A \in M_{m\times m}(\mathbb{F})$ ו-$P \in M_{m\times m}(\mathbb{F})$ הפיכה. הוכח שמתקיים

$$\left(PAP^{-1}\right)^n = PA^nP^{-1}$$

פתרון.

1. בדיקה עבור $n=1$

$$\left(PAP^{-1}\right)^1 = PA^1P^{-1}$$

קבלנו פסוק אמת.

2. הנחה עבור n: נניח שמתקיים

$$\left(PAP^{-1}\right)^n = PA^nP^{-1}$$

3. הוכחה עבור $n+1$: צריך הוכיח שמתקיים

$$\left(PAP^{-1}\right)^{n+1} = PA^{n+1}P^{-1}$$

הבה נוכיח זאת בעזרת ההנחה

$$
\begin{aligned}
\left(PAP^{-1}\right)^{n+1} &= \left(PAP^{-1}\right)^n\left(PAP^{-1}\right) \\
&\overset{*}{=} \left(PA^nP^{-1}\right)\left(PAP^{-1}\right) \\
&= PA^nAP^{-1} \\
&= PA^{n+1}P^{-1}
\end{aligned}
$$

*הנחת האינדוקציה.
סיימנו.

הערה. קישורים חיצוניים

1. קישור1
2. קישור2
3. קישור3

בהצלחה!!