תרגול 3 - עם פתרונות מקוצרים

פונקציות רציפות:

1. הגדרה: תהי $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ פונקציה בין מרחבים מטריים. נאמר ש f היא רציפה ב $x\in X$ אם מתקיים התנאי הבא:

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall y\in X,d(x,y)<\delta\implies\rho(f(x),f(y))<\epsilon$$

שימו לב שההגדרה מקבילה להגדרה באינפי, כאשר במקום ערך מוחלט משתמשים במטריקה כללית.
תנאי שקול לרציפות ב x הוא התנאי הבא: לכל סדרה $x_n\to x$, מתקיים: $f(x_n)\to f(x)$.
בנוסף, נאמר שפונקציה היא רציפה אם היא רציפה בכל נקודה.

2. בהרצאה הוכחתם את השקילויות הבאות:
   (א) $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ רציפה.
   (ב) לכל $A\subseteq Y$ פתוחה, $f^{-1}(A)$ פתוחה ב X.
   (ג) f שומרת על התכנסות סדרות. כלומר, אם $x_n\to x$, אז $f(x_n)\to f(x)$.

3. הגדרות נוספות: פונקציה $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ נקראת "פונקציית ליפשיץ" אם קיים $k\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x,y\in X$ מתקיים:

$$\rho(f(x),f(y))\leq kd(x,y)$$

פונקציה נקראת רציפה במ"ש (במידה שווה) אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in X$ מתקיים:

$$d(x,y)<\delta\implies\rho(f(x),f(y))<\epsilon$$

בהרצאה הוכחתם שכל פונקציית ליפשיץ רציפה במ"ש, וכל פונקציה רציפה במ"ש רציפה.

4. תרגיל: הוכיחו כי פונקציית ההטלה על רכיב i, $P_i:(l_\infty,d_\infty)\to(\mathbb{R},|\cdot|)$ ($P_i((x_n))=x_i$)
למשל:

$$P_i(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...)=\frac{1}{i}$$

היא לפשיץ
הוכחה: הוכיחו שהיא פונקציית ליפשיץ עבור $k=1$.

5. תרגיל: אם $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ רציפה במ"ש אז תמונה של סדרת קושי $\{x_n\}$היא קושי.
הוכחה: ישירות לפי ההגדרותץ

(א) הערה: עבור פונקציה רציפה שאינה רציפה במ"ש הטענה לא נכונה בהכרח. כלומר, אם $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ רציפה, ו$(x_n)\subseteq X$ סדרת קושי, ייתכן ש$(f(x_n))$ אינה סדרת קושי.
הוכחה: נבנה דוגמא נגדית. נסתכל על המרחבים $\mathbb{R}$, $(0,1)$ שניהם עם המטריקה האוקלידית.
נגדיר את הפונקציה הבאה: $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, המוגדרת ע"י $f(x)=\frac{1}{x}$.
מאינפי ידוע כי זאת פונקציה רציפה (הסיבה היא שהפונקציה רציפה בכל נקודה בה היא מוגדרת, ובנוסף היא מוגדרת בכל נקודה בקטע $(0,1)$).
מצאו דוגמא לסדרת קושי ב$(0,1)$ שתמונתה אינה סדרת קושי.

פתיחות לפי תמונה הפוכה של פונקציה רציפה

1. הבחנה: אם ידוע ש$f:(X,d)\to(Y,\rho)$ היא פונקציה רציפה, אז ניתן להוכיח ש$A\subseteq X$ היא קבוצה פתוחה/ סגורה, אם היא שווה לתמונה ההפוכה של קבוצה פתוחה/ סגורה תחת f. כלומר, אם קיימת $B\subseteq Y$ פתוחה/ סגורה, כך ש$A=f^{-1}(B)$.

2. תרגיל: הוכיחו כי $A=\{(x,y):\ xy<1\}\subset\mathbb{R}^2$ פתוחה.
פתרון: מצאו פונקציה רציפה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ וקבוצה פתוחה $O\subseteq\mathbb{R}$, כך ש$A=f^{-1}(O)$.

3. תרגיל (שיופיע בש"ב): יהי (X,d) מרחב מטרי, ו$a\in X$. אזי $f:(X,d)\to\mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י $f_a(x)=d(x,a)$ רציפה.
תרגיל: (מסקנה מהתרגיל הקודם): בכל מרחב מטרי, כדור סגור $B[a,r]$הוא קבוצה סגורה.
הוכחה: מצאו קבוצה סגורה $C\subseteq\mathbb{R}$ כך ש$B[0,r]=f_a^{-1}(C)$.

סגורים

1. הגדרה: תהי X תת קבוצה של מרחב מטרי. הסגור הסידרתי של X, מסומן ב$scl(X)$, הוא האוסף של כל הגבולות של סדרות מX. כלומר,

$$scl(X)=\{x:\exists\{x_n\}\subseteq X,x_n\to x\}$$

(א) תרגיל: במרחב l_∞ ניקח את התת קבוצה A של כל הסדרות שמתאפסות לבסוף.

$$A=\{(x_n)\in l_\infty:\exists n_0,\forall m>n_0,x_m=0\}$$

מהו $scl(A)$?
פתרון:

$$scl(A)=\{(x_n)\in l_\infty:x_n\to 0\}$$

במילים: כל הסדרות (x_n) המקיימות $\lim_x x_n=0$. (שימו לב שהדרישה שהסדרה שייכת לl_∞ מיותרת, כי ידוע שכל סדרה מתכנסת חסומה) .

2. תרגיל: תהא $S \subseteq X$ סגורה ותהא $(s_n) \subseteq S$ סדרה מתכנסת: $s_n \to s$. אזי $s \in S$.
הוכחה: נניח בשלילה ש$s \notin S$. כלומר, $s \in S^c$. לפי הגדרת קבוצה סגורה, S^c פתוחה.
כעת, לפי הגדרת קבוצה פתוחה, קיים $r > 0$ כך ש$B(s,r) \subseteq S^c$.
מכיוון ש$S^c \subseteq (s_n)$, לכל n מתקיים כי $s_n \notin S^c$ ובפרט $s_n \notin B(s,r)$.לכן לכל n מתקיים ש $d(s_n, s) \geq r$. בסתירה לכך ש$s_n \to s$.

3. תרגיל: יהי (X,d) מ"מ, ו$A \subseteq X$. A סגורה אמ"מ היא מכילה את כל הגבולות של סדרות בתוכה. כלומר לכל $(a_n) \subseteq A$, אם $a_n \to x$ אז $x \in A$.
הוכחה: $(\Leftarrow)$ ראינו.
$(\Rightarrow)$ נניח כי A מקיימת את התנאי, כלומר, מכילה את כל הגבולות של סדרות בתוכה, ונוכיח כי A סגורה. לצורך כך נראה ש A^c פתוחה. נניח בשלילה שA^c אינה פתוחה. יש נקודה $x \in A^c$ כך שלכל $r > 0$, $B(x,r) \nsubseteq A^c$. כלומר, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. לכן לכל n, קיים $a_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. הסדרה (a_n) מקיימת: $a_n \to x$. הסבר:

$$d(a_n, x) < \frac{1}{n} \to 0$$

בסתירה לנתון.

4. הגדרה: כעת נרצה להגדיר סגור של קבוצה (מסומן: $cl(A)$ או $\bar{A}$. יש מספר דרכים להגדיר את הסגור, כולן שקולות.
תרגיל: הוכיחו שההגדרות הבאות ל $cl(A)$ שקולות:
   (א) $cl(A) = \{x : d(x,A) = 0\}$
   (ב) הקבוצה הסגורה הכי קטנה שמכילה את A. $cl(A) = \cap_{A \subseteq S} S$, כאשר $A \subseteq S$ סגורה. (שימו לב שמכיוון שחיתוך של קבוצות סגורות היא קבוצה סגורה, הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה את A מצקבלת ע"י חיתוך כל הקבוצות הסגורות שמכילות את A.)
   הוכחה: הוכיחו ע"י הכלה דו-כיוונית.
   מצד אחד, מספיק להוכיח ש$\{x : d(x,A) = 0\}$ היא קבוצה סגורה. השתמשו לשם כך בפונקציה רציפה.
   לכיוון השני, הוכיחו שלכל איבר ב$\{x : d(x,A) = 0\}$ קיימת סדרה בA ששואפת אליו. השתמשו בתנאי על סגירות לגבולות על מנת להסיק ש$\{x : d(x,A) = 0\} \subseteq$ S לכל קבוצה סגורה S שמכילה את A.

5. תרגיל: לכל $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה הגרף שלה $G_f = \{(x, f(x))\}$ סגור ב $\mathbb{R}^2$.
הוכחה הוכיחו שG_f סגורה לגבולות.

6. תרגיל:תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, כך ש$G_f$ סגורה. האם f רציפה?
פתרון: לא בהכרח. ניקח לדוגמא את הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

כידוע,זאת לא פונקציה רציפה. הסבירו למה הגרף שלה הוא קבוצה סגורה.

A' ונקודות מבודדות

1. הגדרה: יהי (X,d) מ"מ ו$A \subseteq X$. נקודת הצטברות של A היא נקודה x שקיימת סדרה ב$A \setminus \{x\}$ ששואפת אליה. בנוסף, מסמנים בA' את האוסף של כל נקודות ההצטברות. A' = נקודות הצטברות = $\{x:\ x \in scl(A \setminus \{x\}\}$. נקודה ב$A$ שאינה נקודת הצטברות של A נקראת נקודה מבודדת.

2. הגדרות שקולות לנקודת הצטברות. x היא נקודת הצטברות של A אם היא מקיימת את אחת מבין התנאים השקולים הבאים:
   (א) קיימת סדרה לא קבועה לבסוף $A \supseteq (a_n)$ ששואפת לx.
   (ב) קיימת סדרה שכל איבריה שונים $A \supseteq (a_n)$ ששואפת לx.
   (ג) לכל $\epsilon > 0$, $(A \setminus \{x\}) \cap B(x,\epsilon) \neq \emptyset$
   (ד) לכל $\epsilon > 0$, קיים $x \neq a \in A$ כך ש$d(x,a) < \epsilon$.

3. דוגמא בסיסית:
   (א) $A = (0,1) \cup \{2\}$. אזי $A' = [0,1]$. מכאן ש2 היא נקודה מבודדת. שימו לב כי לא מתקיימת הכלה בשום כיוון בין A לA'.

4. תרגיל: A סגורה $\iff A' \subseteq A$.
   הוכחה:
   ההוכחה דומה מאוד להוכחה שA סגורה אמ"ם היא סגורה לגבולות, אלא שהפעם עליכם לבנות סדרה שכל איבריה שונים.

5. תרגיל: הוכיחו שלכל קבוצה A, A' היא קבוצה סגורה.
   פתרון: לצורך כך הוכיחו ש$A'' \subseteq A'$.