פתרון תרגיל 1 – לינארית

1. חשבו את המספרים המרוכבים הבאים:

1.1. $\frac{10-3i}{7-4i}-\frac{10-3i}{2i}$

פתרון:

$$\frac{10-3i}{7-4i}-\frac{10-3i}{2i}=\frac{10-3i}{7-4i}\cdot\frac{7+4i}{7+4i}-\frac{10-3i}{2i}\cdot\frac{-2i}{-2i}=\frac{70-21i+40i-12i^2}{7^2+4^2}-\frac{-20i+6i^2}{2^2}=$$

$$\frac{70+19i+12}{65}-\frac{-20i-6}{4}=\frac{82+19i}{65}-\frac{-20i-6}{4}=1\frac{17}{65}+\frac{19}{65}i+5i+\frac{3}{2}=2\frac{99}{130}+5\frac{19}{65}i$$

1.2. $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-25}$

פתרון: ראשית נעביר את $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ להצגה פולרית.

$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$$

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}=\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$\theta=60^\circ \quad or \quad \theta=240^\circ$$

$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ נמצא ברביע הראשון לכן הזווית המתאימה היא $\theta=60^\circ$

ו $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=1cis60^\circ=cis60^\circ$

לכן, לפי משפט דה מואבר:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-25}=(cis60^\circ)^{-25}=cis(-25\cdot60^\circ)=cis(-60^\circ)=\cos(-60^\circ)+\sin(-60^\circ)i$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

1.3. $\left(\frac{5}{2+i}\right)^6$

פתרון: נשים לב $\frac{5}{2+i}=\frac{5}{2+i}\frac{2-i}{2-i}=\frac{10-5i}{4+1}=2-i$

כעת נעביר את $2-i$ להצגה פולרית.

$$r=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$
$$\tan\theta=\frac{-1}{2}\Rightarrow$$
$$\theta=-26.57^\circ \quad or \quad \theta=153.43^\circ$$

$2-i$ נמצא ברביע הרביעי לכן הזווית המתאימה היא $\theta=-26.57^\circ$

ו $\frac{5}{2+i}=2-i=\sqrt{5}cis(-26.57^\circ)$

לכן, לפי משפט דה מואבר:

$$\left(\frac{5}{2+i}\right)^6=(\sqrt{5}cis(-26.57^\circ))^6=\sqrt{5}^6cis(6\cdot-26.57^\circ)=125cis(-159.39^\circ)$$
$$=125(\cos(-159.39^\circ)+\sin(-159.39^\circ)i)=125(-0.936-0.352i)=-117-44i$$

2. פתרו את המשוואות הבאות ומצאו את המספר המרוכב z:

2.1. $\frac{z-1}{1-i}=\frac{2iz+1}{1+i}$

פתרון:

$$\frac{z-1}{1-i}=\frac{2iz+1}{1+i}$$
$$(z-1)(1+i)=(2iz+1)(1-i)$$
$$z-1+iz-i=2iz+1-2i^2z-i$$
$$z-1+iz-i=2iz+1+2z-i$$
$$-z-iz=2$$
$$z(-1-i)=2$$
$$z=\frac{2}{-1-i}\cdot\frac{-1+i}{-1+i}=\frac{-2+2i}{1^2+1^2}=-1+i$$

2.2. $\frac{1-i}{2+i}=\frac{8-2z}{(1+i)z-2}$

פתרון: z מופיע במכנה לכן נמצא תחילה תחום הגדרה.

ת"ה:

$$(1+i)z-2\neq 0$$
$$z\neq\frac{2}{1+i}=\frac{2}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{2-2i}{2}=1-i$$

כעת, נפתור את המשוואה:

$$\frac{1-i}{2+i}=\frac{8-2z}{(1+i)z-2}$$
$$(1-i)((1+i)z-2)=(8-2z)(2+i)$$
$$(1^2+1^2)z-2(1-i)=16-4z+8i-2iz$$
$$2z-2+2i=16-4z+8i-2iz$$
$$6z+2iz=18+6i$$
$$z(6+2i)=18+6i$$
$$z=\frac{18+6i}{6+2i}=\frac{18+6i}{6+2i}\cdot\frac{6-2i}{6-2i}=\frac{108+36i-36i+12}{36+4}=\frac{120}{40}=3$$

הפתרון שקיבלנו מקיים את תחום ההגדרה, לכן פתרון המשוואה הוא $z=3$

2.3. $i\overline{z}+2z=\overline{-1-2i}$

פתרון: נסמן $z=a+bi$ אזי $\overline{z}=a-bi$.

נציב במשוואה ונפתור:

$$i\overline{z}+2z=\overline{-1-2i}$$
$$i\overline{z}+2z=-1+2i$$
$$-i(a-bi)+2(a+bi)=-1+2i$$
$$-ai+bi^2+2a+2bi=-1+2i$$
$$-ai-b+2a+2bi=-1+2i$$
$$(2a-b)+(-a+2b)i=-1+2i$$

לפי יחידות ההצגה יתקיים שוויון בין שני האגפים, אם ורק אם החלק הממשי שלהם שווה והחלק המדומה שלהם שווה.

לכן, המשוואה הנ"ל שקולה למערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases}2a-b=-1\\-a+2b=2\end{cases}$$
$$I)b=2a+1$$
$$II)-a+2(2a+1)=2$$
$$-a+4a+2=2$$
$$3a=0\Rightarrow a=0$$
$$I)b=1$$

לכן פתרון המשוואה הנתונה הוא $z=0+1i$, כלומר $z=i$.

2.4. $z\overline{z}+z^2=2+z-\overline{z}$

פתרון: נסמן $z=a+bi$ אזי $\overline{z}=a-bi$.

נציב במשוואה ונפתור:

$$\overline{z\bar{z}} + z^2 = 2 + z -$$
$$\bar{\bar{z}}\bar{z} + z^2 = 2 + z - \bar{z}$$
$$\bar{z}z + z^2 = 2 + z - \bar{z}$$
$$|z|^2 + z^2 = 2 + 2\operatorname{Im}(z)i$$
$$a^2 + b^2 + (a+bi)^2 = 2 + 2bi$$
$$a^2 + b^2 + a^2 + 2abi - b^2 = 2 + 2bi$$
$$2a^2 + 2abi = 2 + 2bi$$

לפי יחידות ההצגה יתקיים שוויון בין שני האגפים, אם ורק אם החלק הממשי שלהם שווה והחלק המדומה שלהם שווה.
לכן, המשוואה הנ"ל שקולה למערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 2a^2 = 2 \\ 2ab = 2b \end{cases}$$
$$I)\, a^2 = 1$$
$$\begin{array}{c|c} a = 1 & a = -1 \\ II)\, 2b = 2b & II)\, -2b = 2b \\ 0 = 0 & 4b = 0 \\ \forall b & b = 0 \\ z = 1 + bi, \forall b & z = -1 \end{array}$$

לכן פתרונות המשוואה הנתונה הם $z = -1$ ו $z = 1 + bi$ לכל b ממשי.

3.

3.1 הוכיחו כי לכל z, z_1, z_2 מרוכבים מתקיים:

3.1.1 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

הוכחה: נסמן $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. אזי:

$$|z_1 z_2| = |(a+bi)(c+di)| = |(ac-bd) + (ad+bc)i| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} =$$
$$\sqrt{a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2adbc + b^2c^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} =$$
$$\sqrt{a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2)} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \sqrt{(a^2+b^2)}\sqrt{(c^2+d^2)} = |z_1||z_2|$$

3.1.2 $z\bar{z} = |z|^2$

הוכחה: נסמן $z = a + bi$, אזי:

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = |z|^2$$

3.2 נתון כי $z = r cis\theta \neq 0$. מצאו את ההצגה הקוטבית של המספרים הבאים:

3.2.1 $|z|$

פתרון: נשים לב: $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = r$

לכן, עלינו להציג את המספר $r = r + 0i$ בצורה קוטבית.
ברור, כי המרחק של $(r,0)$ מ $(0,0)$ הוא r.
כמו כן, $r = r + 0i$ נמצא על הציר הממשי מימין ל $(0,0)$, לכן, הזווית המתאימה לו היא $0°$
בסה"כ ההצגה הקוטבית שלו היא $r = rcis(0°)$. לכן $|z| = rcis(0°)$

3.2.2. $\bar{z}$

פתרון: ב 3.1.2 הוכחנו כי $z\bar{z} = |z|^2$. מכיוון ש $z \neq 0$ ניתן לחלק בו. נקבל: $\bar{z} = \frac{|z|^2}{z}$ לכן

$$\bar{z} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{(rcis(0°))^2}{rcis\theta} = \frac{r^2 cis(2 \cdot 0°)}{rcis\theta} = \frac{r^2 cis(0°)}{rcis\theta} = rcis(0-\theta) = rcis(-\theta)$$

4. פתרו את המשוואות הבאות:

4.1. $z^6 = 1$

פתרון:
שלב א': נעביר את המשוואה לצורה פולרית: $z = rcis\theta$, $1 = 1cis(0°)$
לכן:

$$(rcis\theta)^6 = 1cis0$$

$$r^6 cis(6\theta) = 1cis0$$

יתקיים שוויון אם ורק אם:

$$\begin{cases} r^6 = 1 \Rightarrow r = 1 \\ 6\theta = 0° + 360°k \Rightarrow \theta = 60°k \end{cases}$$

לכן הפתרונות למשוואה הם:
$z = 1cis(60°k)$ לכל k שלם.
נשים לב, על מנת לכסות את כל הפתרונות מספיק לרוץ על k מ 0 עד 5.
(מכיוון שעבור כל k אחר נקבל את הפתרונות הנ"ל באופן מחזורי).
לכן, בסה"כ הפתרונות הם:
$z = cis(60°k)$ עבור $k = 0,..,5$.

4.2. $z^4 = \sqrt{3} + i$

פתרון:
שלב א': נעביר את המשוואה לצורה פולרית: $z = rcis\theta$.
עבור $\sqrt{3} + i$ נמצא את ההצגה הפולרית.

$$r = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\theta = 30° \quad or \quad \theta = 210°$$

$\sqrt{3} + i$ נמצא ברביע הראשון לכן הזווית המתאימה היא $\theta = 30°$
ו $\sqrt{3} + i = 2cis30°$

נציב במשוואה:

$$z^4 = \sqrt{3}+i$$
$$(rcis\theta)^4 = 2cis30°$$
$$r^4cis(4\theta) = 2cis30°$$

יתקיים שוויון אם ורק אם:

$$\begin{cases} r^4 = 2 \Rightarrow r = \sqrt[4]{2} \\ 4\theta = 30° + 360°k \Rightarrow \theta = 7.5° + 90°k \end{cases}$$

לכן הפתרונות למשוואה הם:

$z = \sqrt[4]{2}cis(7.5° + 90°k)$ לכל k שלם.

נשים לב, על מנת לכסות את כל הפתרונות מספיק לרוץ על k מ 0 עד 3.
(מכיוון שעבור כל k אחר נקבל את הפתרונות הנ"ל באופן מחזורי).
לכן, בסה"כ הפתרונות הם:

$z = \sqrt[4]{2}cis(7.5° + 90°k)$ עבור $k = 0,..,3$.

4.3. $z^5 - 2 + 2i = 0$

פתרון:

נעביר אגפים ונקבל את המשוואה $z^5 = 2-2i$
כעת, נעביר את המשוואה לצורה פולרית: $z = rcis\theta$.
עבור $2-2i$ נמצא את ההצגה הפולרית.

$$r = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$
$$\tan\theta = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow$$
$$\theta = -45° \quad or \quad \theta = 135°$$

$2-2i$ נמצא ברביע הרביעי לכן הזווית המתאימה היא $\theta = -45°$
ו $2-2i = \sqrt{8}cis(-45°)$

נציב במשוואה:

$$z^5 = 2-2i$$
$$(rcis\theta)^5 = \sqrt{8}cis(-45°)$$
$$r^5cis(5\theta) = \sqrt{8}cis(-45°)$$

יתקיים שוויון אם ורק אם:

$$\begin{cases} r^5 = \sqrt{8} \Rightarrow r = \sqrt[10]{8} \\ 5\theta = -45° + 360°k \Rightarrow \theta = -9° + 72°k \end{cases}$$

לכן הפתרונות למשוואה הם:

$z = \sqrt[10]{8}cis(-9° + 72°k)$ לכל k שלם.

נשים לב, על מנת לכסות את כל הפתרונות מספיק לרוץ על k מ 0 עד 4.
(מכיוון שעבור כל k אחר נקבל את הפתרונות הנ"ל באופן מחזורי).
לכן, בסה"כ הפתרונות הם:

$z = \sqrt[10]{8}cis(-9° + 72°k)$ עבור $k = 0,..,4$.

.5 יהי z מספר מרוכב כך ש $|z|=1$. הוכיחו כי $|iz-\bar{z}|\le 2$.

הוכחה:

$$|iz-\bar{z}|=\left|z\left(i-\frac{\bar{z}}{z}\right)\right|=|z|\left|\left(i-\frac{\bar{z}}{z}\right)\right|\underset{|z|=1}{=}\left|\left(i-\frac{\bar{z}}{z}\right)\right|\underset{\neq\Delta}{\le}$$

$$|i|+\left|-\frac{\bar{z}}{z}\right|\underset{|z|=|-z|}{=}1+\left|\frac{\bar{z}}{z}\right|=1+\left|\frac{\bar{z}}{z}\right|=1+\frac{|\bar{z}|}{|z|}\underset{|\bar{z}|=|z|}{=}1+1=2$$

.6 נתון $|z_1|=|z_2|=1$. הוכיחו כי

.6.1 $\frac{z_1+z_2}{1-z_1z_2}$ הוא מספר מדומה (כלומר, החלק הממשי שלו שווה לאפס) בהנחה ש $1-z_1z_2\neq 0$.

.6.2

הוכחה: נשים לב: מכיוון ש $1-z_1z_2\neq 0$ המספר הנ"ל קיים.

נכפול את המונה והמכנה בצמוד של המכנה:

$$\frac{z_1+z_2}{1-z_1z_2}=\frac{z_1+z_2}{1-z_1z_2}\frac{\overline{1-z_1z_2}}{\overline{1-z_1z_2}}=\frac{z_1+z_2}{1-z_1z_2}\frac{1-\overline{z_1z_2}}{\overline{1-z_1z_2}}=\frac{z_1+z_2-z_1\overline{z_1z_2}-z_2\overline{z_1z_2}}{|1-z_1z_2|^2}=$$

$$\frac{z_1+z_2-|z_1|^2\,\overline{z_2}-|z_2|^2\,\overline{z_1}}{|1-z_1z_2|^2}\underset{|z_1|=|z_2|=1}{=}\frac{z_1+z_2-\overline{z_2}-\overline{z_1}}{|1-z_1z_2|^2}=\frac{z_1-\overline{z_1}+z_2-\overline{z_2}}{|1-z_1z_2|^2}=$$

$$\frac{2\operatorname{Im}(z_1)i+2\operatorname{Im}(z_2)i}{|1-z_1z_2|^2}=\frac{2\operatorname{Im}(z_1)+2\operatorname{Im}(z_2)}{|1-z_1z_2|^2}i$$

נשים לב, הביטוי $\frac{2\operatorname{Im}(z_1)+2\operatorname{Im}(z_2)}{|1-z_1z_2|^2}$ ממשי. אכן – המונה ממשי כי $\operatorname{Im}(z)$ ממשי לכל z והמכנה ממשי בתור ערך מוחלט (בריבוע).

לכן הביטוי $\frac{2\operatorname{Im}(z_1)+2\operatorname{Im}(z_2)}{|1-z_1z_2|^2}i=\frac{z_1+z_2}{1-z_1z_2}$ הוא מדומה.

.6.3 $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ הוא מספר ממשי, בהנחה ש $1+z_1z_2\neq 0$.

הוכחה: נשים לב: מכיוון ש $1+z_1z_2\neq 0$ המספר הנ"ל קיים.

נכפול את המונה והמכנה בצמוד של המכנה:

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\frac{\overline{1+z_1z_2}}{\overline{1+z_1z_2}}=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\frac{1+\overline{z_1z_2}}{\overline{1+z_1z_2}}=\frac{z_1+z_2+z_1\overline{z_1z_2}+z_2\overline{z_1z_2}}{|1+z_1z_2|^2}=$$

$$\frac{z_1+z_2+|z_1|^2\,\overline{z_2}+|z_2|^2\,\overline{z_1}}{|1+z_1z_2|^2}\underset{|z_1|=|z_2|=1}{=}\frac{z_1+z_2+\overline{z_2}+\overline{z_1}}{|1+z_1z_2|^2}=\frac{z_1+\overline{z_1}+z_2+\overline{z_2}}{|1+z_1z_2|^2}=$$

$$\frac{2\operatorname{Re}(z_1)+2\operatorname{Re}(z_2)}{|1+z_1z_2|^2}=\frac{2\operatorname{Re}(z_1)+2\operatorname{Re}(z_2)}{|1+z_1z_2|^2}$$

נשים לב, הביטוי $\frac{2\operatorname{Re}(z_1)+2\operatorname{Re}(z_2)}{|1+z_1z_2|^2}$ ממשי. אכן – המונה ממשי כי $\operatorname{Re}(z)$ ממשי לכל z

והמכנה ממשי בתור ערך מוחלט (בריבוע). לכן $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ממשי.

בהצלחה! ☺