מבוא לטופולוגיה – תרגיל 9

<u>שאלה 1</u>

יהיו (X,τ_1) , (X,τ_2) שני מ"ט, כך ש-(X,τ_1) קומפקטי ו- $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

<u>הוכיחו</u> ש-(X,τ_2) קומפקטי.

<u>שאלה 2</u>

יהי (X,τ) מרחב טופטלוגי עם *טופולוגיה קו-ספית,*

כלומר: $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X \mid |U^c| < \infty\}$ (הוכחנו פעם ש-τ טופולוגיה).

<u>הכיחו</u> ש-(X,τ) קומפקטי.

(<u>הערה</u>. התחלתי בכיתה את ההוכחה בעזרת התאוריה שלמטה, בשאלה 3, אבל ישנה הוכחה יותר קצרה ויפה. כפיר סלומון ואליעזר שפרכר כבר מצאו אותה.)

<u>שאלה 3</u>

תזכורת.

<u>הגדרה.</u> **תכונת החיתוך הסופי.**

אוסף קבוצות $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ מקיים את *תכונת החיתוך הסופי* אם לכל תת-אוסף סופי שלו חיתוך לא ריק,

כלומר, לכל תת-קבוצה סופית $F \subseteq I$ מתקיים:

$$\bigcap_{\alpha\in F} A_\alpha \neq \emptyset$$

<u>הוכיחו</u> משפט (פעם הוכנו בכיתה במסגרת מ"מ):

מ"ט X קומפקטי אם ורק אם

כל אוסף $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של תת-קבוצות <u>סגורות</u> שלו המקיים **תכונת חיתוך סופי** , הוא בעל חיתוך לא ריק, כלומר:

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \emptyset$$

שאלה 4
יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים ו-Y מרחב האוסדורף.
תהא תת-קבוצה $A \subseteq X$ צפופה ב-X ויהיו $f,g\colon X \to Y$ שתי
פונקציות רציפות כך ש- $g|_A = f|_A$.
הוכיחו ש- $f = g$.

שאלה 5. (מהארצאה האחרונה)
יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים ו-B בסיס של המרחב X .
הוכיחו שפונקציה $f\colon X \to Y$ פתוחה אם ורק אם לכל $V \in B$ מתקיים:
$f(V)$ היא קבוצה פתוחה ב-Y .