תרגול 11

המרחב הניצב ותהליך גראם שמידט

תהליך האורתוגונליזציה של גראם – שמידט

נניח ש $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ הוא בסיס של מרחב מכפלה פנימית V.

ניתן לקבל בסיס אורתוגונאלי $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ עבור V כלהלן.

$$w_1 = v_1$$
$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$
$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2$$
$$...$$

וכו...

הערה

אם ננרמל את כל הוקטורים בבסיס אורתוגונאלי נקבל בסיס אורתונורמלי.

תרגיל

מצא בסיס אורתונורמלי לתת מרחב U של $\mathbb{R}^4$. $U = span\{(1,1,1,1),(1,2,4,5),(1,-3,-4,-2)\}$.

פתרון

תחילה $w_1 = (1,1,1,1)$.

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = (1,2,4,5) - \frac{\langle (1,2,4,5),(1,1,1,1)\rangle}{4}(1,1,1,1) = (-2,-1,1,2).$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = (1,-3,-4,-2) - \frac{-8}{4}(1,1,1,1) - \frac{-7}{10}(-2,-1,1,2) = \left(\frac{8}{5}, -\frac{17}{10}, -\frac{13}{10}, \frac{7}{5}\right)$$

לאחר נרמול נקבל את הבסיס

$$\left\{\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{\sqrt{10}}(-2,-1,1,1), \frac{1}{\sqrt{910}}(16,-17,-13,14)\right\}$$

אי שיוויון בסל

עבור $\{v_1, v_2, ...v_k\}$ אורתונומלים, $\|v\|^2 \geq |\langle v, v_1\rangle|^2 + |\langle v, v_2\rangle|^2 + ... + |\langle v, v_k\rangle|^2$ ומתקיים שוויון אם ורק אם $v \in span\{v_1, v_2, ...v_k\}$.

דוגמא

נשים לב ש $v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), v_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ וקטורים ב $\mathbb{R}^4$

$$\|(0,1,1,1)\|^2 > \left|\left\langle (0,1,11), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle (0,1,11), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\rangle\right|^2$$

$$\|(0,1,0,1)\|^2 = \left|\left\langle (0,1,11), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle (0,1,11), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\rangle\right|^2$$

<u>תרגיל</u>

הוכיחו שאם $S \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה אורתונורמלית עם n וקטורים אז לכל $v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$\|v\|^2 = |\langle v, v_1\rangle|^2 + |\langle v, v_2\rangle|^2 + \ldots + |\langle v, v_n\rangle|^2$.

<u>פתרון</u>

S קבוצה אורתונורמלית ולכן בת"ל. נתון שבקבוצה S יש n וקטורים והמימד של $\mathbb{R}^n$ הוא n ולכן S פורשת ז"א לכל $v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $v \in spanS$ ז"א $\|v\|^2 = |\langle v, v_1\rangle|^2 + |\langle v, v_2\rangle|^2 + \ldots + |\langle v, v_n\rangle|^2$.

<u>אי שוויון קושי שוורץ</u>

$|\langle u, v\rangle| \le \|u\| \cdot \|v\|$ והשוויון מתקיים אם ורק אם הוקטורים תלויים ליניארית.

<u>תרגיל</u>

הוכח כי עבור $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}^n$ כלשהם מתקיים $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|^2 \le n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)$.

<u>פתרון</u>

ניקח את הווקטורים $u = (1,1,\ldots,1), v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

$$\|u\|^2 = n \quad , \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$$

$$\langle u, v\rangle^2 = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|^2$$

ומאי שוויון קושי שוורץ נקבל $|\langle u, v\rangle|^2 \le \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$ וע"י הצבה פשוטה נקבל את הדרוש.

<u>משפט פירוק הניצב</u>

לכל תת מרחב U של V מתקיים:

א. $U \oplus U^\perp = V$.

ב. $\left(U^\perp\right)^\perp = U$.

<u>תרגיל</u>

הוכח כי אם: $V = U \oplus W$ (סכום ישר, לאו דווקא אורתוגונאלי) אז: $V = U^\perp \oplus W^\perp$.

<u>פתרון</u>

שיעור שעבר ראינו ש $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp, \{0\} = V^\perp, V = \{0\}^\perp$.

נתון ש $V = U \oplus W$ ולכן $V = U + W$ סה"כ נקבל ש $\{0\} = V^\perp = (U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

נתון ש $V = U \oplus W$ ולכן $U \cap W = \{0\}$ כעת $V = \{0\}^\perp = (U \cap W)^\perp$ נשאר להוכיח ש

$(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$ מכיוון ש $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ נקבל ש

$\left(U^\perp + W^\perp\right)^\perp = \left(U^\perp\right)^\perp \cap \left(W^\perp\right)^\perp = U \cap W$ נעבור בשני האגפים למשלימים אורתוגונאליים ובעזרת משפט פירוק הניצב נקבל ש $U^\perp + W^\perp = (U \cap W)^\perp$ כדרוש.

<u>ההעתקה הצמודה</u>

<u>פונקציונאלי ליניארי ומשפט ההצגה של ריס</u>

<u>הגדרה</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל השדה F. המרחב הדואלי של V שיסומן ב V^* הוא המרחב הוקטורי שאיבריו הם הפונקציות הליניאריות $V \to F$. החיבור והכפל בסקלר מוגדרים בצורה הטריויאלית. איבר ב V^* נקרא פונקציונאלי ליניארי.
יהי V מרחב וקטורי ו S תת קבוצה של V נגדיר את המרחב האפס של S : ע"י
$S^0 = \{\varphi \in V^* : \varphi(v) = 0; \forall v \in S\}$.

<u>הערה</u>

ניתן להראות ש S^0 תת מרחב של V^* (במידה ויאפשר הזמן)

<u>תרגיל ממבחן (תשע"ב מועד ב)</u>

א. נסח את משפט ההצגה של ריס.
ב. יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $U \subseteq V$ תת מרחב. הוכח: לכל $\varphi \in U^0$ קיים $w \in U^\perp$ יחיד כך ש $\varphi(v) = \langle v, w \rangle$ לכל $v \in V$.

<u>פתרון</u>

א. לכל פונקציונאלי ליניארי φ יש וקטור יחיד u כך ש $\varphi(v) = \langle v, u \rangle$ לכל $v \in V$.
ב. יהי $\varphi \in U^0$ ובפרט $\varphi \in V^*$ וממשפט ההצגה של ריס נקבל שקיים $w \in V$ יחיד כך ש $\varphi(v) = \langle v, w \rangle$ לכל $v \in V$. נשאר להוכיח ש $w \in U^\perp$ ז"א צריך להוכיח שלכל $u \in U$ מתקיים $\langle u, w \rangle = 0$. יהי $u \in U$ ואז $\varphi(u) = \langle u, w \rangle$ ומכיוון ש $\varphi \in U^0$ נקבל ש $\varphi(u) = 0$ ואז $\langle u, w \rangle = 0$ כדרוש.

<u>ההעתקה הצמודה</u>

<u>משפט</u>

תהי $T : V \to W$ העתקה ליניארית בין מרחבי מכפלה פנימית מעל אותו שדה.
א. קיימת העתקה יחידה $T^* : W \to V$ כך שלכל $v \in V, w \in W$ מתקיים: $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle$.
ב. ההעתקה $T^* : W \to V$ היא העתקה ליניארית.
ג. בבסיס אורתונורמלי כלשהו $\{w_1, \ldots, w_n\}$ של W, $T^* : W \to V$ נתונה ע"י הנוסחה
$$T^*(v) = \sum_{i=1}^{n} \overline{(T(w_i), v)} w_i .$$

<u>הגדרה</u>

תהי $T : V \to W$ העתקה ליניארית בין מרחבי מכפלה פנימית מעל אותו שדה $T^* : W \to V$ היא ההעתקה היחידה המקיימת $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle$ לכל $v \in V, w \in W$.

<u>תרגיל</u>

נתון מרחב $\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית בו. נתונה העתקה ליניארית $T(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

מצא את ההעתקה הצמודה T^*.

<u>פתרון</u>

נבחר ב $\mathbb{R}^2$ את הבסיס האורתונורמלי הסטנדרטי $\{e_1, e_2\}$ ונשתמש בנוסחה עבור T^*.
נקבל ש $T^*(v) = \langle T(e_1), v \rangle e_1 + \langle T(e_2), v \rangle e_2$. על פי הגדרת T מתקיים
$T(e_1) = (1,1), T(e_2) = (-1,-1)$ ולכן לכל $v = (x, y)$ נקבל
$\langle T(e_1), v \rangle = x + y, \langle T(e_2), v \rangle = -x - y$ ז"א

$$T^*(v) = (x+y)e_1 + (-x-y)e_2 = (x+y, -x-y)$$

$$T^*(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$