תמר בר-און
$tamarnachshoni@gmail.com$
שעות קבלה- תשלחו לי מייל, נקבע פגישה בזום.
יש אתר ב$math-wiki$. "טופולוגיה תיכוניסטים תשפ"א".
יהיו הקלטות והקובץ שאנחנו כותבים במהלך התרגול.
יש ש"ב- לא להגשה. תעשו אותם!
יהיה בוחן- באמצע סמסטר.

1. הגדרה: מטריקה.
$d: X \times X \to \mathbb{R}$

$$d(x,y)=0 \iff x=y$$

$$d(x,y)=d(y,x)$$

$$d(x,y) \le d(x,z)+d(z,y)$$

למעשה ניתן להסיק שהפונקציה תמיד חיובית משאר הנתונים, לא צריך לדרוש את זה במיוחד.
כלומר, רוצים להראות שלכל x,y $d(x,y) \ge 0$.
הוכחה: נציב באי שוויון המשולש את הנקודות $x=y,z$.

$$d(x,x) \le d(x,z)+d(z,x)$$

$$d(x,x)=0$$

$$d(x,z)=d(z,x)$$

$$0 \le 2d(x,z)$$

ולכן $d(x,z) \ge 0$. נכון לכל x,z.

2. דוגמאות: המטריקה האוקלידית על $\mathbb{R}$ $(\mathbb{R},|\cdot|)$, $d(x,y)=|x-y|$. המטריקה הדיסקרטית:
$d(x,y)=\begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x \ne y \end{cases}$

3. תרגיל: תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. נגדיר $d_f(x,y)=|f(x)-f(y)|$. האם d_f היא מטריקה? האם יש תלות בתכונה של f?
פתרון: אם f אינה חח"ע יש $x \ne y$ כך ש$f(x)=f(y)$. ואז $d_f(x,y)=|f(x)-f(y)|=0$ סתירה לתכונה 1.
סימטריות תתקיים לכל f, ברור. כי זה ערך מוחלט.
תכונה 1: אם $x=y$ אז $d_f(x,y)=0$. ואם $d_f(x,y)=0$ אז $|f(x)-f(y)|=0$

אמ"ם $f(x)=f(y)$, ומכיוון שהנחנו שf חח"ע זה גורר ש$x=y$.
אי"ש המשולש:

$$d_f(x,y)=|f(x)-f(y)|=|f(x)-f(z)+f(z)-f(y)|\leq$$

$$|f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)|=d_f(x,z)+d_f(y,z)$$

לכל בחירה של פונקציה חח"ע מ$\mathbb{R}$ ל$\mathbb{R}$ נקבל מטריקה.

4. אולטרה-מטריקה: זאת מטריקה עם אי"ש משולש יותר חזק.

$$d(x,y)\leq \max\{d(x,z),d(z,y)\}$$

למשל המטריקה הדיסקרטית היא אולטרה מטריקה.

5. $d(x,y)\leq \max\{d(x,z),d(z,y)\}$
הגדרה: מטריקה p אדית. יהי p ראשוני. לכל $x,y\in\mathbb{Z}$ נסמן: $k(x,y)=\max\{i:p^i|x-y\}$

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \dfrac{1}{p^{k(x,y)}} & x\neq y\end{cases}$$

למשל: $d_3(5,7)=1$

$$d_3(5,8)=\frac{1}{3}$$

נוכיח שהמטריקה הp אדית היא למעשה אולטרה-מטריקה.
נסתפק בלהוכיח את אי"ש המשולש החזק, כי 2 התכונות הראשונות טריוויאלית ועשיתם בעבר.
רוצים להוכיח:

$$d(x,y)\leq \max\{d(x,z),d(z,y)\}$$

יהיו x,y,z. אם $x=y$, ברור. אם $x=z$, ברור. כנ"ל לגבי $z=y$. אז אפשר להניח ששלושתם שונים.
כלומר, אנחנו רוצים להוכיח

$$\frac{1}{p^{k(x,y)}}\leq \max\left\{\frac{1}{p^{k(x,z)}},\frac{1}{p^{k(z,y)}}\right\}$$

שקול להוכיח ש

$$k(x,y)\geq \min\left\{k(x,z),k(z,y)\right\}$$

נניח בה"כ $t=k(x,z)\leq k(z,y)$. כלומר, $p^t\mid x-z,z-y$. ולכן הוא מחלק את הסכום שהוא $x-y$. ולכן $k(x,y)\geq t=\min\left\{k(x,z),k(z,y)\right\}$. מש"ל.

6. תזכורת: כל מרחב נורמי הוא גם מרחב מטרי. המטריקה היא $d(x,y)=||x-y||$.

7. הגדרה: מרחק בין נקודה לקבוצה:

$$d(x,A)=\inf_{a\in A}\{d(x,a)\}$$

8. ב $l_2 = \left\{(x_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}:\ \sum|x_n|^2<\infty\right\}$ עם המטריקה המושרית מהנורמה $\|x\| = \sqrt{\sum|x_n|^2}$. מצאו את המרחק של $x=\left(-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\dots\right)$ מ $A=\{e_i\}$
פתרון:

$$d(x,e_i)=\sqrt{\sum_{n\neq i}\frac{1}{n^2}+(1+\frac{1}{i})^2}=\sqrt{\sum_n\frac{1}{n^2}+1+\frac{2}{i}}=\sqrt{\frac{\pi^2}{6}+1+\frac{2}{i}}$$

$$d(x,A)=inf\{d(x,e_i)\}=\sqrt{\frac{\pi^2}{6}+1}$$

המרחק בין הנקודה לקבוצה לא שווה למרחק משום נקודה מסויימת. כלומר, זה אינפימום ולא מינימום.

9. אי שיוויון עם קבוצה: הוכיחו כי $d(x,A)\le d(x,y)+d(y,A)$.
הוכחה: לכל $a\in A$ מתקיים:

$$d(x,a)\le d(x,y)+d(y,a)$$

$$d(x,A)=inf_{a\in A}\{d(x,a)\}\le d(x,a)\forall a\in A$$

$$d(x,A)\le d(x,y)+d(y,a)$$

$$\forall a\in A: d(y,a)\ge d(x,A)-d(x,y)$$

ולכן

$$d(y,A)=inf\{d(y,A)\}\ge d(x,A)-d(x,y)$$

$$d(x,A)\le d(x,y)+d(y,A)$$

10. מה יקרה אם נקח נקודה ושתי קבוצות?

$$d(A,B)=\inf_{a\in A,b\in B}\{d(a,b)\}$$

אי"ש המשולש כבר לא יתקיים. נקח $\mathbb{R}$, $x=1, A=[0,1], B=[-1,0]$. ללכת מx לB יותר קצר כאשר עוברים דרך A.

11. קוטר: $diam(A)=\sup_{x,y\in A}\{d(x,y)\}$. קבוצה נקראת חסומה אם הקוטר שלה סופי.

12. תרגיל: איחוד סופי של קבוצות חסומות הוא קבוצה חסומה.
פתרון: יהיו $A_1,...,A_n$ קבוצות ונסמן $r_i=diam(A_i)$. נסמן $r=\max\{r_i\}$. לכל $A_i\neq\emptyset$ נבחר $a_i\in A_i$. נסמן

$$m=\max\{d(a_i,a_j)\}$$

לכל שתי נקודות x,y באיחוד, $x\in A_i, y\in A_j$

$$d(x,y)\leq d(x,a_i)+d(a_i,a_j)+d(a_j,y)\leq 2r+m$$

לכן $diam(A_1\cup...\cup A_n)\leq 2r+m$

13. הגדרה: כדור פתוח:

$$B(a,r)=\{x:d(x,a)<r\}$$

כדור סגור:

$$B[a,r]=\{x:d(x,a)\leq r\}$$

14. תרגיל: הוכיחו שקבוצה היא חסומה אמ"ם היא מוכלת בכדור.
הוכחה: נניח ש$A\subseteq B(a,r)$. כדור הוא חסום, כי $diam(B(a,r))\leq 2r$.

$$d(x,y)\leq d(x,a)+d(a,y)<r+r$$

שאלת עזר: האם $diam(B(a,r))=2r$? לא בהכרח. $diam(B(0,1))=0$ במטריקה הדיסקרטית על $\mathbb{R}$.
נניח שA חסומה ולא ריקה. נבחר $a\in A$ ונסמן $r=diam(A)$. אז $A\subseteq B(a,r+1)$.

15. תרגיל: תנו דוגמא לאיזשהו מרחב מטרי ושני כדורים $B(a,r)\subset B(b,s)$ כאשר $r>s$.
פתרון: נקח $X=\{a,b,c\}$ עם המטריקה $d(a,b)=2, d(b,c)=2, d(a,c)=3$.

$$B(a,2.9)=\{a,b\}$$

$$B(b,2.1)=X$$

16. במטריקה ה 3 אדית

(א) מצאו את $B\left(0,\frac{2}{5}\right)$ו $B\left[0,\frac{2}{5}\right]$
המרחקים האפשריים הם $0,1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},...$. המרחק $\frac{2}{5}$ אף פעם לא מתקבל, ולכן

$$B\left[0,\frac{2}{5}\right]=B\left(0,\frac{2}{5}\right)$$

אם המרחק קטן מ$\frac{2}{5}$ אז הוא כל דבר חוץ מ1. כלומר $\frac{1}{3}$ ומטה. כלומר $k(x,0) \geq 1$.
וזה אומר ש$x = x - 0 \mid 3$. אז

$$B\left(0, \frac{2}{5}\right) = 3\mathbb{Z}$$

17. שיכון איזומטרי: פונקציה בין שני מרחבים מטריים ששומרת מרחק. שיכון איזומטרי הוא תמיד חח"ע כי אם $x \neq y$ אז $d(x,y) \neq 0$, ואז $d(f(x), f(y)) \neq 0$ ולכן $f(x) \neq f(y)$.
איזומטריה זאת פונקציה שומרת מרחקים שהיא גם על.

18. תרגיל: מצאו מרחב מטרי ושיכון איזומטרי מהמרחב לעצמו שאינו על.
פתרון: $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x + 1$.

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |x + 1 - (y + 1)| = |x - y| = d(x, y)$$