מתמטיקה מד"ר תשפג בוחן

1. מצאו פתרון למד"ר $y' = \frac{x^3+y^3}{xy^2}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1) = 2$.

פתרון: זוהי מד"ר מהצורה $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ שהרי

$$y' = \frac{x^3+y^3}{xy^2} = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{y}{x}$$

ו $g(z) = \left(\frac{1}{z}\right)^2 + z$. נציב $z = \frac{y}{x}$ ונקבל

$$\int \frac{1}{g(z)-z}\mathrm{dz} = \ln|x| + C$$

נחשב את האינטגרל משמאל:

$$\int \frac{1}{g(z)-z}\mathrm{dz} = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{z}\right)^2 + z - z}\mathrm{dz} = \int z^2\mathrm{dz} = \frac{z^3}{3}$$

ולכן $\frac{z^3}{3} = \ln|x| + C$. נבודד את z

$$z = \sqrt[3]{3\ln|x| + C}$$

ונחזור ל y. כיוון ש $y = xz$ נקבל ש

$$y = x \cdot \sqrt[3]{3\ln|x| + C}.$$

נציב תנאי התחלה

$$2 = y(1) = 1 \cdot \sqrt[3]{3\ln|1| + C} = \sqrt[3]{C}$$

ולכן $C=8$ והפתרון לתרגיל הוא

$$y(x)=x\cdot\sqrt[3]{3\ln|x|+8}.$$

2. מצאו פתרון למד"ר $y'=\frac{y^2+e^x}{-2xy}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1)=-1$.

פתרון: נסדר את המד"ר מחדש:

$$-2xyy'=y^2+e^x$$

$$0=\left(y^2+e^x\right)\mathrm{dx}+2xy\mathrm{dy}$$

ונגדיר

$$P\left(x,y\right)=y^2+e^x$$
$$Q\left(x,y\right)=2xy.$$

נשים לב כי

$$P_y=2y=Q_x$$

ולכן המד"ר מדויקת. נגדיר

$$F=\int\left(y^2+e^x\right)\mathrm{dx}+c(y)=xy^2+e^x+c(y)$$

כאשר נמצא $c(y)$ מהשיוויון $F_y=Q$.

$$F_y=2yx+c'(y)$$

$$Q=2xy$$

ושיויון בינהם: $2xy+c'(y)=2xy$. מכאן ש $c'=0$ ולכן נבחר $c(y)=0$. לכן

$$F(x,y)=xy^2+e^x$$

והפתרון נתון באופן סתום $F(x,y)=C$ או מפורשות

$$xy^2+e^x=C$$

ולכן

$$.y=\pm\sqrt{\frac{C-e^x}{x}}$$

נציב תנאי התחלה $y(1)=2$

$$2=y(1)=\pm\sqrt{\frac{C-e}{1}}$$

לכן צריך לקחת את הפתרון עם הפלוס (שלפני השורש) ובנוסף

$$4=C-e$$

לכן צריך את הפלוס ולקבל ש $C=e+4$. סה"כ הפתרון

$$.y=\sqrt{\frac{C-e^x}{x}}=\sqrt{\frac{e+4-e^x}{x}}$$

3. כדורגל בעל מסה של $m=1\text{kg}$ נבעט כלפי מעלה במהירות התחלתית של v_0. הניחו כי כוח המשיכה הוא קבוע ושווה ל mg, כאשר g קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ. מצאו את v_0 אם נתון שהכדור הגיע חזרה לנקודה ממנה הוא נבעט לאחר שתי שניות , במקרים הבאים:

(א) בהנחה שאין כוחות נוספים פרט לכוח המשיכה.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0)=0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg=1\cdot g=g$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). לכן הכח הוא $-g$. מהשיוון $F=ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל על הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g=ma=a$$

או $-g=y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t)=-gt+c$$

ונציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבוע c. נתון כי $y'(0) = v_0$ (מהירות התחלתית v_0 כלפי מעלה, הכיוון החיובי) לכן

$$v_0 = y'(0) = -g \cdot 0 + c = c$$

ולכן $y'(t) = -gt + v_0$. המיקום הוא

$$y = \int y' = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + D$$

ומהנתון $y(0) = 0$ נקבל $D = 0$. סה"כ

$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t.$$

כעת נתון ש $y(2) = 0$ ולכן

$$0 = -g\frac{4}{2} + v_0 2 = -2g + 2v_0$$

ולכן $v_0 = g$.

(ב) בהנחה שכוח התנגדות האוויר שווה בגודלו לגודל המהירות של הכדור

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0) = 0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot g = g$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל v וכיוונו הפוך מהכיוון של v לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-v$. לכן הכח הכולל הוא $-g - v$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g - v = ma = a$$

או $y''(t) = -g - y'(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z = y'$ ונקבל

$$z' + z = -g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ (עבור $a(x) = 1, b(x) = -g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x)=x$ ונציב

$$e^{-x}\left(C-\int ge^{x}\mathrm{dx}\right)=e^{-x}\left(C-ge^{x}\right)=e^{-x}C-g$$

לכן:

$$z(t)=e^{-t}C-g$$

או

$$y'(t)=e^{-t}C-g.$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0)=v_0$ (מהירות התחלתית v_0 כלפי מעלה, הכיוון החיובי) לכן

$$v_0=y'(0)=e^{-0}C-g=C-g$$

ומכאן $C=v_0+g$. מכאן ש

$$y'(t)=e^{-t}\left(v_0+g\right)-g$$

ו

$$y=\int y=-e^{-t}\left(v_0+g\right)-gt+D.$$

מהנתון $y(0)=0$ נקבל $0=-\left(v_0+g\right)+D$ ולכן $D=v_0+g$. סה"כ

$$\begin{aligned} y(t)&=-e^{-t}\left(v_0+g\right)-gt+\left(v_0+g\right).\\ &=\left(1-e^{-t}\right)\left(v_0+g\right)-gt\end{aligned}$$

כעת נתון ש $y(2)=0$ ולכן

$$0=\left(1-e^{-2}\right)\left(v_0+g\right)-2g=\left(1-e^{-2}\right)v_0-\left(1+e^{-2}\right)g$$

ולכן $v_0=\frac{\left(1+e^{-2}\right)g}{\left(1-e^{-2}\right)}$.