13.07.23

84-172 מתמטיקה ב' לכימאים – דר' ארז שיינר – פתרון מועד א' – תשפ"ג

משך המבחן: שלוש שעות הוראות: יש לפתור את כל השאלות, משקל כל שאלה 28 נק', כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

שאלה 1 נביט במערכת המשוואות הבאה עם הנעלמים x, y, z והפרמטר a, בשדה המספרים הממשיים.

$$\begin{cases} x+z=1 \\ ax+(a^2-a-2)y+az=2a+1 \\ (1-a)x+(a+2-a^2)y-2z=-a \end{cases}$$

א. מצאו לכל ערכי הפרמטר a אם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות כלל.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ a & a^2-a-2 & a & 2a+1 \\ 1-a & a+2-a^2 & -2 & -a \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-(1-a)R_1]{R_2-aR_1}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-a-2 & 0 & a+1 \\ 0 & a+2-a^2 & -2-(1-a) & -a-(1-a) \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-a-2 & 0 & a+1 \\ 0 & a+2-a^2 & a-3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-a-2 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & a-3 & -2-a \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & (a+1)(a-2) & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & a-3 & -2-a \end{array}\right)$$

כאשר $a \neq -1,2,3$ קיבלנו מטריצה מדורגת, ללא שורת סתירה וללא משתנים חופשיים ולכן פתרון יחיד.

נציב את שלושת הערכים הנותרים:

עבור $a=-1$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו מטריצה מדורגת, ללא שורת סתירה, עם משתנה חופשי ולכן אינסוף פתרונות.

עבור $a=2$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

מטריצה זו אמנם אינה מדורגת, אך יש בה שורת סתירה ולכן אין פתרון למערכת.

לבסוף עבור $a = 3$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

זו מטריצה מדורגת, עם שורת סתירה, ולכן אין פתרון למערכת.

סיכום:

פתרון יחיד כאשר $a \neq -1,2,3$

אינסוף פתרונות כאשר $a = -1$

אין פתרון כאשר $a = 2,3$

ב. מצאו את קבוצת הפתרונות למערכת עבור $a = -1$.

ניקח את המטריצה המדורגת כאשר $a = -1$ מהסעיף הקודם, ונדרג אותה קנונית על מנת למצוא את הפתרונות

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{4}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נציב פרמטר במשתנה החופשי $y = t$ ונקבל כי

$$x = \frac{3}{4}$$

$$y = t$$

$$z = \frac{1}{4}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$\left(\frac{3}{4}, t, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right) + t(0,1,0)$$

ג. האם יש ערך של a עבורו יש פתרון למערכת המקיים גם את המשוואה $x + y + z = 1$?

נוסיף את המשוואה למערכת ונמשיך בדירוג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & (a+1)(a-2) & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & a-3 & -2-a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 - R_1}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & (a+1)(a-2) & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & a-3 & -2-a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - (a+1)(a-2)R_4}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & | & 1\\ 0 & 0 & 0 & | & a+1\\ 0 & 0 & a-3 & | & -2-a\\ 0 & 1 & 0 & | & 0\end{pmatrix}$$

כבר רואים שאם $a \neq -1$ אין פתרון למערכת.

נציב $a = -1$ ונמשיך לדרג

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & | & 1\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & -4 & | & -1\\ 0 & 1 & 0 & | & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_4}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & | & 1\\ 0 & 1 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & -4 & | & -1\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix}$$

מדובר במטריצה מדורגת, ללא שורת סתירה, ולכן יש פתרון במקרה זה.

סה"כ עבור $a = -1$ יש פתרון המקיים את המשוואות המקוריות וגם את המשוואה הנוספת הנתונה בסעיף.

<u>שאלה 2</u> תהי העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המקיימת $T(1,0) = T(0,1)$.

א. חשבו את $T(1,-1)$.

$$T(1,-1) = T\big((1,0)-(0,1)\big) = T(1,0) - T(0,1) = (0,0)$$

ב. הראו כי $[T]$ <u>אינה</u> הפיכה.

נסמן $T(1,0) = (a,b)$ ולכן המטריצה המייצגת הינה

$$[T] = \begin{pmatrix}a & a\\ b & b\end{pmatrix}$$

כעת נחשב את הדטרמיננטה

$$\det([T]) = ab - ab = 0$$

ולכן המטריצה אינה הפיכה (לכן גם ההעתקה אינה הפיכה).

נתון בנוסף כי $T(1,1) = (2,4)$

ג. חשבו את $[T]$.

נמשיך עם הסימון מהסעיף הקודם, $T(1,0) = T(0,1) = (a,b)$

ויחד עם הנתון נקבל כי

$$(2,4) = T(1,1) = T\big((1,0)+(0,1)\big) = T(1,0) + T(0,1) = (a,b) + (a,b) = (2a,2b)$$

מכאן

$$a = 1, b = 2$$

ולכן

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ד. מצאו P הפיכה וD אלכסונית כך ש $D = P^{-1}[T]P$.

אנו מתבקשים ללכסן את המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

ראשית נחשב פולינום אופייני

$$p(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 2 & 2-x \end{pmatrix} = (1-x)(2-x) - 2 = x^2 - 3x = x(x-3)$$

כלומר הערכים העצמיים הם

$$\lambda = 0,3$$

נמצא וקטורים עצמיים.

עבור $\lambda = 0$ הו"ע הוא פתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה למטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נציב $y = t$ ונקבל כי $x = -t$ ולכן הפתרון הוא $(-t,t) = t(-1,1)$ ולכן הו"ע הוא $(-1,1)$

עבור $\lambda = 3$ הו"ע הוא פתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה למטריצה

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נציב $y = t$ ונקבל כי $x = \frac{1}{2}t$ ולכן הפתרון הוא $\left(\frac{1}{2}t, t\right) = \frac{1}{2}t(1,2)$ ולכן ו"ע הוא $(1,2)$

הערה: אפשר גם לקחת את הו"ע $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

סה"כ המטריצות המבוקשות הן

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

שאלה 3 אין קשר בין הסעיפים

א. מצאו את משוואת המישור המשיק לפונקציה $f(x,y)=\sin(x+y^2)$ בנקודה $(\pi,0)$.

נוסחת משוואת המישור המשיק היא

$$z-z_0=f_x\cdot(x-x_0)+f_y\cdot(y-y_0)$$

ובנקודה שלנו

$$z-f(\pi,0)=f_x(\pi,0)(x-\pi)+f_y(\pi,0)(y-0)$$

נחשב את הנגזרות

$$f_x(x,y)=\cos(x+y^2)$$

$$f_y(x,y)=\cos(x+y^2)\cdot 2y$$

כעת נציב

$$f(\pi,0)=\sin(\pi+0^2)=0$$

$$f_x(\pi,0)=\cos(\pi+0^2)=-1$$

$$f_y(\pi,0)=\cos(\pi+0^2)\cdot 2\cdot 0=0$$

ולכן סה"כ משוואת המישור המשיק היא

$$z-0=(-1)(x-\pi)+0\cdot(y-0)$$

$$z=-x+\pi$$

ב. מצאו את הזוית בין הוקטורים $(1,0,\sqrt{3}),(1,0,0)$.

$$\cos(\theta)=\frac{(1,0,\sqrt{3})\cdot(1,0,0)}{\sqrt{1^2+0^2+(\sqrt{3})^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\frac{1}{2}$$

ולכן

$$\theta=\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=60^\circ$$

ג. מצאו את כל הפתרונות המרוכבים למשוואה $i\cdot z^4=i+cis(\pi)$.

ראשית נעביר את $cis(\pi)$ לצורה הקרטזית

$$iz^4=i-1$$

כעת נכפול בצמוד של המקדם של z^4, כלומר נכפול ב$-i$

$$z^4=1+i$$

כעת נעביר את המספר המרוכב לצורה קוטבית

$$z^4 = \sqrt{2} cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

ולכן הפתרונות הם

$$z_k = 2^{\frac{1}{8}} cis\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{4}\right)$$

עבור $k = 0,1,2,3$

שאלה 4 בכל אחד מן הסעיפים חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_D f(x,y)dxdy$

א. כאשר $f(x,y) = y\sin(x)$ והתחום הוא $D = \{(x,y)|0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\}$.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^\pi \left(\int_0^\pi y sin(x) dx\right) dy$$

נחשב את האינטגרל הפנימי

$$\int_0^\pi y sin(x) dx = y\int_0^\pi \sin(x)\, dx = y[-\cos(x)]_0^\pi = 2y$$

כעת נקבל כי

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^\pi 2y dy = [y^2]_0^\pi = \pi^2$$

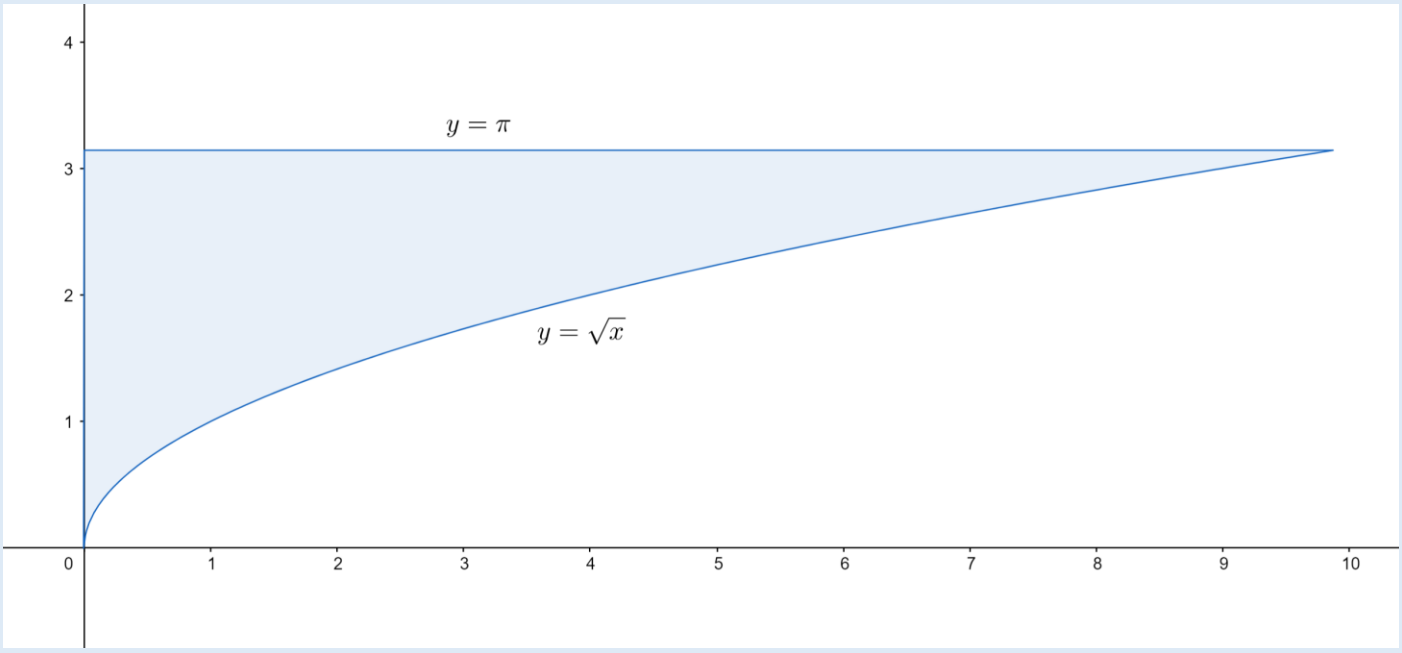
ב. כאשר $f(x,y) = y^2 + x^2$ והתחום הוא $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \le 1\}$.

נעבור לקואורדינטות קוטביות

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r^2 \cdot r d\theta\right) dr = \int_0^1 r^3 \cdot 2\pi dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

ג. כאשר $f(x,y)=\cos\left(\frac{x}{y}\right)$ והתחום הוא $D=\left\{(x,y)|0\le x\le \pi^2,\sqrt{x}\le y\le \pi\right\}$. רמז: החליפו סדר אינטגרציה.

נשרטט את התחום



אנו רואים שהטווח בציר y הוא בין 0 לבין π

ובציר הx זזים בין $x=0$ לבין העקומה $y=\sqrt{x}$ כלומר $x=y^2$

סה"כ התחום הוא

$$D=\left\{(x,y)|0\le x\le \pi^2,\sqrt{x}\le y\le \pi\right\}=\left\{(x,y)|0\le y\le \pi, 0\le x\le y^2\right\}$$

ולכן

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^{\pi}\left(\int_0^{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)dx\right)dy$$

נחשב את האינטגרל הפנימי

$$\int_0^{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)dx=\left[\frac{\sin\left(\frac{x}{y}\right)}{\frac{1}{y}}\right]_0^{y^2}=y\sin\left(\frac{y^2}{y}\right)-y\sin\left(\frac{0}{y}\right)=y\sin(y)$$

לכן נקבל

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^{\pi}y\sin(y)\,dy=\begin{Bmatrix}f'=\sin(y) & g=y\\ f=-\cos(y) & g'=1\end{Bmatrix}=[-y\cos(y)]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos(y)\,dy=$$

$$=-\pi\cos(\pi)+0+[\sin(y)]_0^{\pi}=\pi$$