פתרונות תרגיל הבוחן, שאלות 1-3.

1. הפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2+2x-2y$ היא פולינום ולכן היא חלקה - גזירה אין סוף פעמים ברציפות. אז כל המשפטים שלנו פועלים.

התחום שלנו קומפקטי, ולכן פונק' רציפה תקבל עליו מינימום גלובלי ומקסימום גלובלי.

נביט קודם בפנים התחום - $0<y<\sqrt{1-x^2}$. אם נקודת המינימום / מקסימום הגלובלי נמצאת שם אז היא חייבת להיות נקודת אקסטרימום - לקיים $\nabla f(x,y)=(0,0)$

נחשב $\nabla f(x,y)=(2x+2,2y-2)$. זה שווה $(0,0)$רק בנקודה $(x,y)=(-1,1)$והיא בכלל מחוץ לתחום שלנו, אז אין סיבה להסתכל עליה.

נעבור לשפה. היא כוללת שני חלקים חלקים (באנגלית $smooth\ parts$, שתי המילים נכתבות אותו דבר, "חלקים", בעברית).

הראשות הוא $y=0$, $x\in[-1,1]$. שם $f(x,y)=f(x,0)=x^2+2x$. אם יש לנקודה מינימום או מקסימום גלובליים בפנים הקטע $x\in(-1,1)$

חייב להתקיים שם $f(x,0)_x^{'}=2x+2=0$, ז"א $x=-1$.

מצד אחד - זה לא בפנים הקטע. מצד שני, אם מחפשים מינימום ומקסימום גלובליים חייבים בכל מקרה להבדוק את

קצוות הקטע $x=1,-1$. אילו הן הנקודות $(x,y)=(1,0),(-1,0)$.

החלק החלק השני הוא $x^2+y^2=1$, $y\neq 0$. אפשר להשתמש בכופלי לגראנז' אבל אני מעדיף לתת לו קורד' פולריות $x=\cos\theta, y=\sin\theta$ $0\leq\theta\leq\pi$.

אז $f(x,y)=f(\cos\theta,\sin\theta)=\cos\theta^2+\sin\theta^2+2\cos\theta-2\sin\theta=1+2\cos\theta-2\sin\theta$.

קצוות הקטע $\theta=0,\pi$הן הנקודות $(x,y)=(1,0),(-1,0)$ואנחנו כבר מחשיבים אותן.

אם יש מיניום או מקסימום גלובלי בפנים הקטע יתקיים שם $f(\cos\theta,\sin\theta)_\theta^{'}=-2\sin\theta-2\cos\theta=0$. ז"א $\cos\theta=-\sin\theta$, ז"א $\theta=\frac{3\pi}{4}+k\pi$.

מבין אילו, הנק' היחידה בקטע שלנו היא $\theta=\frac{3\pi}{4}$ושם $(x,y)=\left(\cos\frac{3\pi}{4},\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

לבסוף יש לנו 3 נקודות, $(x,y)=(1,0),(-1,0),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, שגם המימנימום

הגלובלי וגם המקסימום הגלובלי חייבים להיות אחד מהנק' הנ"ל.

נחשב $f\left(1,0\right)=3$, $f\left(-1,0\right)=-1$ ו־ $f,\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-2\sqrt{2}$.

מבין אילו ערך f הכי גדול ב־ $\left(1,0\right)$, ולכן שם המקסימום הגלובלי וערכו 3. ערך f הכי קטן ב־ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, ולכן שם המקסימום הגלובלי וערכו $1-2\sqrt{2}$.

2. $f\left(u,v\right)=\left(u^3-v^2,\sin u-\ln v\right)$ היא פונקציה חלקה בתחום $\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2|v>0\right\}$.

מטריצת יעקובי (מטריצת הנגזרות) שלה היא $J_f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v}\\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3u^2 & 2v\\ \cos u & -\frac{1}{v}\end{pmatrix}$

בנקודה $(u,v)=(0,1)$זה שווה ל־ $J_f\left(0,1\right)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. הדטרמיננטה של זה היא $-2\neq 0$ולכן מטריצת יעקובי ב־ $(u,v)=(0,1)$הפיכה.

לפי משפט העתקה ההפוכה הלוקלי יש סביבה Ωשל $(0,1)$כך שהצימצום של f לתחום Ωולטווח $f\left(\Omega\right)$ הוא דיפאומורפיזם (פונקציה גזירה

ברציפות 1־1 ועל שהפונקציה ההופכית של גם גזירה ברציפות) וכן הפונקציה ההופכית $g\colon f\left(\Omega\right)\to\Omega$ מקיימת $J_g\left(f\left(u,v\right)\right)=J_f\left(u,v\right)^{-1}$

עבור $(u,v)=(0,1)$ $J_f\left(0,1\right)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ ו־ $f\left(0,1\right)=\left(-1,0\right)$ ולכן $J_g\left(-1,0\right)=$

$$\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

3. מדובר בחישוב פשוט של כופלי לגראנז'. הפונקציה היא $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2$ והאילוץ הוא $g\left(x,y,z\right)=x^4+y^4+z^4-1=0$

נקודות הקיצון מקיימות אחד משני תנאים. או $\nabla g\left(x,y,z\right)=\left(4x^3,4y^3,4z^3\right)=0$, אבל הפתרון היחיד של זה הוא $(x,y,z)=(0,0,0)$וזה לא מקיים $g\left(x,y,z\right)=0$.

התנאי השני הוא $\nabla\phi\left(x,y,z,\lambda\right)=\left(0,0,0,0\right)$ כאשר $\phi\left(x,y,z,\lambda\right)=f\left(x,y,z\right)+\lambda g\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2+\lambda x^4+\lambda y^4+\lambda z^4-\lambda$.

נניח ש־ $\nabla\phi\left(x,y,z,\lambda\right)=\left(2x-4\lambda x^3,2y-4\lambda y^3,2z-4\lambda z^3,g\left(x,y,z\right)\right)=\left(0,0,0,0\right)$.

אם $\lambda\leq 0$יש לזה פתרון יחיד $(x,y,z)=(0,0,0)$, אבל כבר ראינו שהוא לא מקיים $g\left(x,y,z\right)=0$, ולכן אי אפשר להשתמש בו.

אם $\lambda > 0$ אז יש עוד $3^3 - 1 = 26$ פתרונות בהם $x, y, z = 0, \pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$. נחלק אותם ל־3 קבוצות של של פתאונות דומים.

א. פתרונות מהצורה $(x,y,z) = \left(\pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}, 0, 0\right)$, $(x,y,z) = \left(0, \pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}, 0\right)$ ו־$(x,y,z) = \left(0, 0, \pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\right)$ מקיימים $g(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 1 = \frac{1}{4\lambda^2} - 1$. זה שווה 0 אם ורק אם $\lambda = \frac{1}{2}$, ואז $(x,y,z) = (\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$.

בנקודות הללו ערך f הוא $f(x,y,z) = 1^2 = 1$.

ב. פתרונות מהצורה $(x,y,z) = \left(\pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}, \pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}, 0\right)$, $(x,y,z) = \left(0, \pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}, \pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\right)$ ו־$(x,y,z) = \left(\pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}, 0, \pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\right)$ מקיימים $g(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 1 = \frac{1}{2\lambda^2} - 1$. זה שווה 0 אם ורק אם $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ואז $(x,y,z) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right), \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

בנקודות הללו ערך f הוא $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

ג. פתרונות מהצורה $(x,y,z) = \left(\pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}, \pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}, \pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\right)$ מקיימים $g(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 1 = \frac{3}{4\lambda^2} - 1$. זה שווה 0 אם ורק אם $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ואז $(x,y,z) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$. בנקודות הללו ערך f הוא $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

זה הגבוהה מבין הערכים, ולכן אילו נקודות המקסימום הגלובליות. נקודות המינים הגלובליות הן נקודות מקרה א' שבהן ערך f הכי קטן.