

תרגיל להגשה באלגברה מופשטת 1

88-211 סמסטר א' תשע"ו

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא עד 28.1.16.

שאלה 1. תהי G חבורה.

א. הוכיחו כי $\text{Inn}(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$.

ב. נניח ש- $\text{Aut}(G)$ היא חבורה ציקלית. הוכיחו כי G אבלית.

ג. תהיינה G ו- H חבורות סופיות, ונניח ש- $(|G|, |H|) = 1$. הוכיחו כי

$$\text{Aut}(G \times H) \cong \text{Aut}(G) \times \text{Aut}(H)$$

שאלה 2. הוכיחו שאם בחבורה G יש מחלקת צמידות עם בדיוק שני איברים, אזי יש ב- G תת-חבורה נורמלית.

שאלה 3. מיינו את כל החבורות הסופיות שיש להן שתי מחלקות צמידות.

שאלה 4 (בונוס). כתבו את חבורת המנה $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \mathbb{Z}(4,6)$ כסכום ישר של חבורות ציקליות.

הגדרה. תהיינה G, H ו- N חבורות, ויהיו $f : H \rightarrow G$ ו- $g : G \rightarrow N$ הומומורפיזמים. אומרים שהדיאגרמה

$$\{e\} \longrightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} N \longrightarrow \{e\}$$

היא **סדרה מדויקת קצרה**, אם f חד-חד ערכית, g על ו- $\text{Im } f = \ker g$.

שאלה 5. תהי

$$\{e\} \longrightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} N \longrightarrow \{e\}$$

סדרה מדויקת קצרה.

א. הוכיחו כי

$$G/f(H) \cong N$$

ב. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים כאשר החבורות G, H ו- K אבליות:

1. קיים הומומורפיזם $r : G \rightarrow H$ שעבורו $r \circ f = \text{Id}_H$.

2. קיים הומומורפיזם $s : N \rightarrow G$ שעבורו $s \circ g = \text{Id}_N$.

3. קיימת תת-חבורה $K \leq G$ שעבורה $G \cong K \oplus \text{Im } f$ כסכום ישר פנימי¹.

¹סכום ישר פנימי הוא כמו מכפלה ישרה פנימית; צריך להוכיח ש- $\text{Im } f \triangleleft K, K \cap \text{Im } f = \{e\}$ ו- $K \cdot \text{Im } f = G$

שאלה 6. תהי G חבורה מסדר $2n$, כאשר n אי-זוגי. הוכיחו שיש ל- G תת-חבורה מאינדקס 2.
(רמז: משפט קיילי).

שאלה 7. תהי G תת-חבורה מסדר 36 של A_6 . יש בה שמונה-עשר איברים מסדר 4 ותשעה איברים מסדר 2.

א. מהם סדרם של יתר האיברים?

ב. מהם מבני המחזורים של איברי החבורה, וכמה איברים בדיוק יש מכל מבנה?
(רמז: הפעילו את הלמה של ברנסייד).

ג. G פועלת על $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ככל תת-חבורה של S_6 . הוכיחו שהפעולה הזו טרנזיטיבית.

בהצלחה!