<u>תרגיל כיתה 13 – פיתרון משוואות בעזרת טורי חזקות</u>

מתרגל: אדם צ'פמן

טורי חזקות בפתרון משוואות דיפרנציאליות:

בהינתן משוואה דיפרנציאלית, ניתן להציב $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ ולמצוא את המקדמים c_n ע"י השוואת מקדמים.

תרגילים

- $y''+x^2y=0$, $y(0)=1$ ו $y'(0)=0$.

פיתרון: נציב $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ במשוואה ונקבל

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+x^2\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n=0$, משמע

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+2}=0$. מהשוואת מקדמים נקבל כי $c_2=0$ (השוואת המקדמים של 1), $c_3=0$ (השוואת המקדמים של x) ולכל n מתקיים

$c_{n+4}=-\frac{1}{(n+1)(n+2)}c_n$. מ $y'(0)=0$ נובע כי $c_1=0$ ומ $y(0)=1$ נובע כי

$c_0=1$. משמע, הטור שלנו הוא $y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot\ldots\cdot(4n-1)\cdot4n}$.

- מצא הרחבה עד לסדר 3 [הכוונה למצוא את המקדמים עד המקדם של x^3 בפיתוח טיילור] של הפונקציה המקיימת $y'=\sin(y)-\sin(x)$ ו $y(0)=0$.

פיתרון: נציב $y=\sum_{n=1}^{\infty}c_n x^n$ ($c_0=0$ בגלל ש $y(0)=0$). לפי פיתוח לטור טיילו מתקיים

$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. בטור המתקבל מהצבת $y=\sum_{n=1}^{\infty}c_n x^n$ ב $\sin(y)$,

המקדם של 1 הוא 0, המקדם של x הוא c_1 והמקדם של x^2 הוא c_2.

מצד שני $y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$. מהשוואת מקדמים במשוואה

$y'=\sin(y)-\sin(x)$ מקבלים את השוויונות הבאים $c_1=0$, $2c_2=c_1-1$ ו

$3c_3=c_2$. משמע, פיתוח טיילור (עד החזקה השלישית) הוא $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3$.

שיטת אוילר לקירוב:

בהינתן משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון $y'=f(x,y)$ ונקודה $y(x_0)=y_0$ וערך $\tilde{x}$

שרוצים לחשב עבורו את $y(\tilde{x})$ אז ישנה שיטת אוילר. לפי שיטה זו מחלקים את הקטע בין

x_0 ל $\tilde{x}$ ל n חלקים מאורך $h=\frac{\tilde{x}-x_0}{n}$ כלשהו ומחשבים

$y_k=y_{k-1}+h\cdot f(x_{k-1},y_{k-1})$ כאשר $x_k=x_{k-1}+h$ לכל $1\le k\le n$. ככל

שמחלקים את הקטע ליותר חלקים (או לחילופין ככל שהצעד קטן יותר) כך הדיוק גבוה יותר.

דוגמא:

- חשבו לפי שיטת אוילר את $y(1)$ כאשר $y'=x^2y+2$ וגם $y(0)=0$ והצעד הוא $h=0.2$.

פיתרון: $y_1 = 0 + 0.2 \cdot (0+2) = 0.4$.

$y_2 = 0.4 + 0.2 \cdot (0.2^2 \cdot 0.4 + 2) = 0.8032$,

$$y_3 = 0.8032 + 0.2 \cdot (0.4^2 \cdot 0.8032 + 2) = 1.2289024$$

$$y_4 = 1.2289024 + 0.2 \cdot (0.6^2 \cdot 1.2289024 + 2) = 1.7173833728$$

$$y_5 = 1.7173833728 + 0.2 \cdot (0.8^2 \cdot 1.7173833728 + 2) = 2.33720844445184$$

התשובה היא ש $y(1) \approx 2.337$.