פתרון תרגיל 10

1. חשבו את האינטגרלים הבאים

א. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos 3x + \sin 4x)dx}{(x^2+9)^2}$ ב. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2+4x+8}$

ג. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos(3x) dx}{(x^2+4)(x^2+1)}$ ד. $\sum_{n=1}^{6} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx dx}{x^2+2x+5}$

פתרון: במהלך הפתרון נסמן ב־$\Re = \Re(z)$ את החלק הממשי של המספר המרוכב z וב־ $\Im = \Im(z)$ את החלק המדומה של המספר המרוכב z

א. נסמן את האינטגרל הנתון ב־I ונשים לב שאת I ניתן לפצל בצורה

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x dx}{(x^2+9)^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 4x dx}{(x^2+9)^2}.$$

האינטגרל השני מתאפס כיוון שהוא מחושב בקטע סימטרי והפונקציה בתוך האינטגרל היא אי־זוגית. כדי לחשב את האינטגרל הראשון נמצא את סכום השאריות של הפונקציה $g(z) = \frac{e^{3iz}}{(z^2+9)^2}$ בחצי מישור העליון. כיוון ש־$(z^2+9)^2 = (z+3i)^2(z-3i)^2$ נובע שבמישור העליון לפונקציה g יש קוטב מסדר שני בנקודה $z = 3i$. מהנוסחא לחישוב שארית עבור קוטב מסדר שני נקבל

$$\text{Res}(g, 3i) = \lim_{z\to 3i} \left((z-3i)^2 \frac{e^{3iz}}{(z^2+9)^2} \right)' = \lim_{z\to 3i} \left(\frac{e^{3iz}}{(z+3i)^2} \right)'$$

$$= \lim_{z\to 3i} \frac{3ie^{3iz}(z+3i)^2 - 2(z+3i)e^{3iz}}{(z+3i)^4} = \frac{3i\cdot(6i)^2\cdot e^{-9} - 2\cdot 6i\cdot e^{-9}}{(6i)^4}$$

$$= -\frac{20i\cdot e^{-9}}{6^5}.$$

לכן האינטגרל שווה ל־

$$\Re\left(2\pi i \cdot \left(-\frac{20i\cdot e^{-9}}{6^5}\right)\right) = \frac{40\pi\cdot e^{-9}}{6^5}.$$

ב. נגדיר את הפונקציה $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2+4z+8}$ ונמצא את סכום השאריות של f בחצי מישור העליון. מהפירוק $z^2+4z+8 = (z+2+2i)(z+2-2i)$ נובע של־f

יש קוטב פשוט בנקודה $z_0 = -2+2i$ בחצי מישור העליון. מהנוסחא לחישוב שארית במקרה של קוטב פשוט נקבל

$$\text{Res}(f,-2+2i) = \lim_{z\to -2+2i}(z+2-2i)f(z) = \lim_{z\to -2+2i}(z+2-2i)\frac{ze^{iz}}{z^2+4z+8}$$

$$= \lim_{z\to -2+2i}(z+2-2i)\frac{ze^{iz}}{(z+2+2i)(z+2-2i)}$$

$$= \lim_{z\to -2+2i}\frac{ze^{iz}}{(z+2+2i)} = \frac{(1+i)e^{-2i-2}}{2}.$$

לכן האינטגרל שווה ל־

$$\Im\left(2\pi i\cdot\frac{(1+i)e^{-2i-2}}{2}\right) = \pi e^{-2}\cdot\Im\left(i(i-1)\cdot e^{-2i}\right)$$

$$= \pi e^{-2}(\sin 2 - \cos 2).$$

ג. נגדיר את הפונקציה $f(z) = \frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}$ ונמצא את סכום השאריות של f בחצי מישור העליון. מהפירוק $(z^2+4)(z^2+1) = (z+2i)(z-2i)(z-i)(z+i)$ נובע של־f יש קטבים פשוטים בנקודות $z=i,2i$. לכן מהנוסחא לחישוב שארית במקרה של קוטב פשוט נקבל

$$\text{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}$$

$$= \lim_{z\to i}(z-i)\frac{z^2e^{3iz}}{(z+2i)(z-2i)(z-i)(z+i)}$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{z^2e^{3iz}}{(z+2i)(z-2i)(z+i)} = \frac{ie^{-3}}{6}.$$

$$\text{Res}(f,2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}$$

$$= \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{z^2e^{3iz}}{(z+2i)(z-2i)(z-i)(z+i)}$$

$$= \lim_{z\to 2i}\frac{z^2e^{3iz}}{(z+2i)(z-i)(z+i)} = -\frac{ie^{-6}}{3}.$$

לכן האינטגרל שווה ל־

$$\Re\left(2\pi i\left(\frac{ie^{-3}}{6}-\frac{ie^{-6}}{3}\right)\right)=\frac{2\pi}{3}\left(e^{-6}-\frac{e^{-3}}{2}\right).$$

ד. נגדיר $f(z)=\frac{e^{inz}}{z^2+2z+5}$ ונמצא את סכום השאריות של f בחצי מישור העליון. מהפירוק $z^2+2z+5=(z+1-2i)(z+1+2i)$ נקבל של־f יש קוטב פשוט בנקודה $z=-1+2i$. לכן מהנוסחא לחישוב שארית במקרה של קוטב פשוט נקבל

$$\mathrm{Res}(f,-1+2i)=\lim_{z\to-1+2i}(z+1-2i)f(z)=\lim_{z\to-1+2i}(z+1-2i)\frac{e^{inz}}{z^2+2z+5}$$

$$=\lim_{z\to-1+2i}(z+1-2i)\frac{e^{inz}}{(z+1-2i)(z+1+2i)}$$

$$=\lim_{z\to-1+2i}\frac{e^{inz}}{(z+1+2i)}=\frac{e^{-(2+i)n}}{4i}.$$

לכן נקבל ש־

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin nxdx}{x^2+2x+5}=\Im\left(2\pi i\cdot\frac{e^{-(2+i)n}}{4i}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\Im\left(e^{-(2+i)n}\right).$$

לכן נקבל שהאינטגרל בשאלה שווה ל־

$$\sum_{n=1}^{6}\frac{\pi}{2}\cdot\Im\left(e^{-(2+i)n}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\Im\left(\sum_{n=1}^{6}e^{-(2+i)n}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\Im\left(e^{-2-i}\sum_{n=0}^{5}e^{-(2+i)n}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\Im\left(e^{-2-i}\cdot\frac{e^{-6\cdot(2+i)}-1}{e^{-2-i}-1}\right)$$

כיוון ש־

$$\frac{e^{-6\cdot(2+i)}-1}{e^{-2-i}-1}=\frac{e^{-6\cdot(2+i)}-1}{e^{-2-i}-1}\cdot\frac{e^{-2+i}-1}{e^{-2+i}-1}$$

$$=\frac{e^{-14-5i}-e^{-12-6i}-e^{-2+i}+1}{e^{-4}-2e^{-2}\cos(1)+1}$$

נקבל שהאינטגרל שווה ל־

$$\frac{\pi}{2}\cdot\Im\left(\frac{e^{-16-6i}-e^{-14-7i}-e^{-4}+e^{-2-i}}{e^{-4}-2e^{-2}\cos(1)+1}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{-e^{-16}\sin(6) + e^{-14}\sin(7) - e^{-2}\sin(1)}{e^{-4} - 2e^{-2}\cos(1) + 1}.$$

2. כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונקציה $f(z) = 9z^5e^z - 2z^3 + 1$ בתוך העיגול $|z| < 1$?

פתרון: נגדיר את הפונקציות $g(z) = 9z^5e^z$ ו־ $h(z) = -2z^3 + 1$. אז על מעגל היחידה $|z| = 1$ מתקיים

$$|g(z)| = \left|9z^5e^z\right| \geq 9e^{-1} > 3 \geq \left|2z^3\right| + 1 \geq \left|-2z^3 + 1\right| = |h(z)|.$$

לכן g היא הפונקציה הדומיננטית על המעגל $|z| = 1$ ולכן מספר האפסים של f בתוך המעגל $|z| = 1$ שווה למספר האפסים g בתוך מעגל זה. כיוון של־g יש חמישה אפסים בתוך המעגל $|z| = 1$ נובע שכך גם ל־f.

3. כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונקציה $f(z) = z^4 + z^2 - 2z + 1$ בתוך העיגול $|z - 1| < 3$?

פתרון: נגדיר את הפונקציות $g(z) = z^4$ ו־ $h(z) = z^2 - 2z + 1$. אז על המעגל $|z - 1| = 3$ מתקיים

$$|h(z)| = \left|z^2 - 2z + 1\right| = |z - 1|^2 = 9.$$

כמו כן, אם z נמצא על המעגל $|z - 1| = 3$ אז

$$|z| = |z - 1 + 1| \geq |z - 1| - 1 = 2.$$

ולכן על המעגל $|z - 1| = 3$ מתקיים $|g(z)| = \left|z^4\right| = |z|^4 \geq 2^4 = 16$. לכן g היא הפונקציה הדומיננטית על המעגל $|z - 1| = 3$ וכיוון של־g יש ארבעה אפסים בתוך מעגל זה אז כך גם ל־f.

4. כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונקציה $f(z) = 3z^9 + 8z^6 + z^5 + 2z^3 + 1$ בטבעת $1 < |z| < 2$?

פתרון: נגדיר את הפונקציות $g_1(z) = 8z^6$ ו־ $g_2(z) = 3z^9 + z^5 + 2z^3 + 1$. אז על המעגל $|z| = 1$ מתקיים

$$|g_1(z)| = \left|8z^6\right| = 8 \geq 7 \geq \left|3z^9\right| + \left|z^5\right| + \left|2z^3\right| + 1$$

$$\geq \left|3z^9 + z^5 + 2z^3 + 1\right| = |g_2(z)|.$$

לכן g_1 היא הפונקציה הדומיננטית על המעגל $|z| = 1$ וכיוון של־g_1 יש שישה אפסים בתוך המעגל $|z| = 1$ אז כל גם ל־f. כעת נגדיר $h_1(z) = 3z^9$ ו־$h_2(z) = 8z^6 + z^5 + 2z^3 + 1$, אז על המעגל $|z| = 2$ מתקיים

$$|h_1(z)| = \left|3z^9\right| = 3|z|^9 = 3 \cdot 2^9 = 1536 > 561$$

$$= 8 \cdot 2^6 + 2^5 + 2 \cdot 2^3 + 1 \geq 8|z|^6 + |z|^5 + 2|z|^3 + 1$$

$$\geq \left|8z^6 + z^5 + 2z^3 + 1\right| = |h_2(z)|.$$

לכן h_1 היא הפונקציה הדומיננטית על המעגל $|z| = 2$ וכיוון של־h_1 יש תשעה אפסים בתוך המעגל $|z| = 2$ אז כך גם ל־f. לכן מחיסור מספר האפסים של f בעיגול $|z| \leq 1$ ממספר האפסים של f בעיגול $|z| \leq 2$ נקבל של־f יש שלושה אפסים בטבעת $1 < |z| < 2$.

5. לפי הגדרה, "נקודת שבת" של פונקציה f היא נקודה z_0 כך ש־$f(z_0) = z_0$. הוכיחו שאם f היא פונקציה אנליטית בתוך עיגול היחידה $B = \{z : |z| \leq 1\}$, כך שלכל z ב־B מתקיים $|f(z)| < 1$, אז קיימת ל־f נקודת שבת אחת בדיוק בעיגול B.

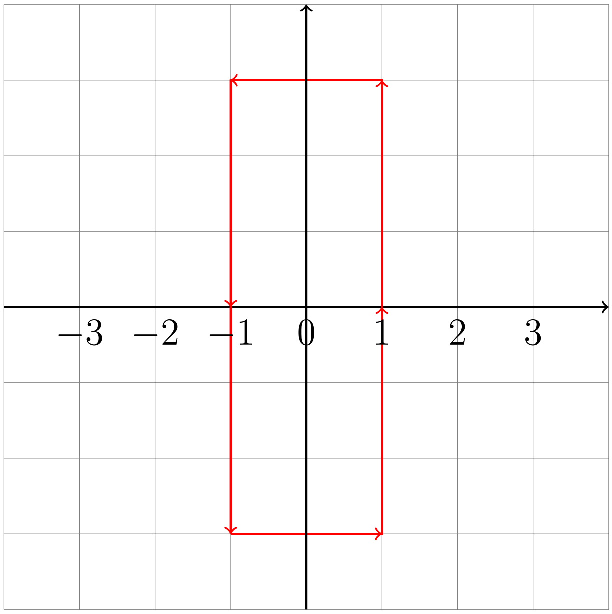
פתרון: נגדיר את הפונקציה $g(z) = f(z) - z$. כיוון שעל המעגל $|z| = 1$ מתקיים $|f(z)| < |z|$ (כי לפי הנתון $|f(z)| < 1$ אם $|z| = 1$) נובע שמספר האפסים של g בתוך המעגל $|z| = 1$ זהה למספר האפסים של הפונקציה $h(z) = z$ בתוך מעגל זה, כלומר אפס אחד. לכן ל־g קיימת נקודה z_0 כך ש־$|z_0| < 1$ ו־$g(z_0) = 0$, כלומר $f(z_0) = z_0$ ואז z_0 היא נקודת שבת של f ששייכת ל־B.

6. כמה אפסים, כולל ריבוי, יש לפונקציה $f(z) = e^z - 3z^4$ בתוך הפס $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \Re z < 1\}$?

פתרון: עבור $a > 0$ נגדיר את העקומה $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ כאשר

$$\gamma_1(t) = ia + t,\ -1 \leq t \leq 1, \quad \gamma_2(t) = 1 - it,\ -a \leq t \leq a,$$

$$\gamma_3(t) = -ia - t,\ -1 \leq t \leq 1, \quad \gamma_4(t) = -1 + it,\ -a \leq t \leq a.$$



כפי שניתן לראות באיור למעלה העקומה γ היא המלבן באדום עם אורך $2a$ המורכבת מארבע המסילות: γ_1 שהיא החלק העליון של המלבן, γ_2 שהיא החלק הימני של המלבן, γ_3 שהיא החלק התחתון של המלבן ו־γ_4 שהיא החלק השמאלי של המלבן. נגדיר את הפונקציות $g(z) = -3z^4, h(z) = e^z$ ונראה שעבור a מספיק גדול g היא הפונקציה הדומיננטית על γ. אכן על γ_1 מתקיים

$$|g(t+ia)| = 3|t+ia|^4 \geq 3a^4 > e \geq e^t = \left|e^{t+ia}\right| = |h(t+ia)|$$

ועל γ_2 מתקיים

$$|g(1-it)| = 3|1-it|^4 \geq 3 > e = \left|e^{1-it}\right| = |h(1-it)|.$$

באותו אופן מראים שגם על γ_3 ו־γ_4 הפונקציה g_2 היא הדומיננטית. לכן כיוון של־g יש אפס מסדר 4 בתוך המלבן נובע שכך גם ל־f. כמו כן מחוץ למסילה γ ל־f אין אפסים בפס $-1 < \Re z < 1$. אכן, אם z הוא מספר מרוכב מחוץ ל־γ בפס $-1 < \Re z < 1$ אז ניתן לרשום $z = t + ib$ כאשר $|t| \leq 1$ ו־$|b| > a$. לכן אם $f(z) = 0$ אז $|e^z| = 3|z|^4$, אבל

$$3|z|^4 = 3|t+ib|^4 > 3a^4 > e \geq \left|e^{t+ib}\right| = |e^z|$$

ואז קיבלנו סתירה. לכן ל־f יש בדיוק ארבעה אפסים בפס $-1 < \Re z < 1$.

7. כמה אפסים, כולל ריבוי, יש לפונקציה $f(z) = (z+3)^2 e^{3z} + (z+2)^4$ במלבן $R = \{(x,y) : -4 \leq x \leq -1, -1 \leq y \leq 1\}$?

<u>פתרון:</u> נגדיר $g(z) = (z+3)^2 e^{3z}$ ו־$h(z) = (z+2)^4$ ונראה ש־h דומיננטית על שפת המלבן R. אכן, הביטוי $|z+2|$ הוא המרחק של z מהנקודה $z_0 = -2$.

לכן, כפי שניתן לראות מהאיור למעטה, המרחק הגדול ביותר של $z_0 = -2$ משפת המלבן הוא $\sqrt{2}$ (המרחק מסומן בכחול) והמרחק הקצר ביותר הוא 1 (המרחק מסומן בירוק). לכן על שפת המלבן R מתקיים $1 \leq |z+2| \leq \sqrt{2}$ ולכן $1 \leq |h(z)| = |z+2|^4 \leq 4$. באותו אופן מראים ש-$1 \leq |z+3| \leq \sqrt{2}$. לכן על שפת המלבן R מתקיים

$$|g(z)| = \left|(z+3)^2 e^{3z}\right| = |z+3|^2 \left|e^{3z}\right| \leq |z+3|^2 \left|e^{3x+i3y}\right|$$

$$= |z+3|^2 e^{3x} \leq \sqrt{2}^2 \cdot e^{-3} = 2 \cdot e^{-3}.$$

לכן $|h(z)| > |g(z)|$ על שפת המלבן. כיוון של-h יש ארבעה אפסים בתוך המלבן R אז כך גם ל-f.