

קורס: 88-231-01,05,08

מרצים: מ. כץ, ש. הורוביץ

ד' אב תש"ע

מבחן בפונקציות מרוכבות מועד א'

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.
משך הבחינה שעתיים. בהצלחה!

1. א. הוכיחו שאם $\operatorname{Re} z > 0$ ואם $z \neq 1$ אז $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| > 1$

ב. הוכיחו שאם $\operatorname{Re} z = 0$ אז $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = 1$

2. נניח שהפונקציות $f(z)$ ו- $z^5 \bar{f}(z)$ שתיהן פונקציות שלמות. הוכיחו שבהכרח $f(z)$ פונקציה קבועה.

3. חשבו $\int_{\gamma} [\sin z + \bar{z}] dz$ כאשר γ היא הקטע הישר מ- $z = 0$ עד $z = 1 - 2i$.

4. חשבו: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x + \sin 2x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$. הצדיקו את תשובתכם.

5. נניח ש- $\{a_n\}$ היא סדרת מספרים מרוכבים כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

א. הוכיחו שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מגדיר פונקציה אנליטית בעיגול היחידה הפתוח $B(0,1)$.

ב. הראו ע"י דוגמה שלפעמים הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מגדירה פונקציה אנליטית בעיגול

$B(0,R)$ כאשר $R > 1$.

6. קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונקציה $2z^5 - z^4 + 2z^3 - z^2 + 5z - 6$ בעיגול $B(0,2)$. הצדיקו את תשובתכם.

