

## השבון אינפי 2

### תרגיל 10

פונקציות מ  $\mathbb{R}^2$  ל-  $\mathbb{R}$  : תחום הגדרה, חישוב גבולות, רציפות, נגזרות חלקיות . נגזרות מכוונות, מישור משיק, דיפרנציאביליות, נקודות קיצון מקומי

1. שרטטו את תחום ההגדרה של פונקציות הבאות :

א.  $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

ב.  $f(x, y) = xe^{-\sqrt{y+2}}$

2. חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו כי אינם קיימים :

א.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,\pi)} x^2 \sin \frac{y}{x}$

ב.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x-2y}{2x-3y}$

ג.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

ד.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{\frac{|x-y|}{x^2-2xy-y^2}}$

3. חשבו את הגבולות החוזרים

א.  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

ב.  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

האם הגבול  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$  קיים ?

4. חשבו את הגבול  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{|x| + |y|} \cos \frac{1}{y^2}$

האם הגבולות החוזרים

א.  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x| + |y|} \cos \frac{1}{y^2}$

ב.  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x| + |y|} \cos \frac{1}{y^2}$

קיימים ?

5. בדקו את רציפות הפונקציות הבאות בתחום הגדרתן :

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{x^2 + 1}{x^2 + (y-1)^2} & (x, y) \neq (0, 1) \\ \frac{\pi}{2} & (x, y) = (0, 1) \end{cases} \quad \text{.א}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{ב.}$$

6. האם קיים ערך של  $a$  עבורו הפונקציה הבאה רציפה בנקודה  $(0, 0)$  ?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ a & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

7. הוכיחו כי הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

אינה רציפה בנקודה  $(0, 0)$ , אך יש לה נגזרות חלקיות בנקודה זו.

8. חשבו נגזרת של פונקציה  $f(x, y) = x \sin(x + y)$  בכיוון של וקטור  $\vec{h} = (-1, 0)$  בנקודה

$$. a = \left( \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right)$$

9. מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$  בנקודה  $(1, -1, 1)$ .

10. מצאו נקודה על המשטח  $z = 3x^2 - y^2$  שבה המישור המשיק למשטח מקביל למישור  $6x + 4y - z = 5$ .

11. האם הפונקציות הבאות דיפרנציאביליות בנקודה  $(0, 0)$  ?

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \quad \text{ג.}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{ד.}$$

12. תהי

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ה. האם  $f(x, y)$  רציפה בנקודה  $(0, 0)$  ?

ו. האם לכל ווקטור  $\vec{h}$  כך ש  $\|h\| = 1$  קיימת נגזרת מכוונת  $\frac{\partial f}{\partial h}(0, 0)$  ?

ז. האם  $f(x, y)$  דיפרנציאבילית בנקודה  $(0, 0)$  ?

13. מצאו את נקודות הקיצון המקומי של הפונקציות הבאות :

$$u(x, y) = 3(x^2 + y^2) + x^3 + 4y \quad \text{א.}$$

$$u(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 \quad \text{ב.}$$

**בהצלחה במבחנים!!**