שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: פרופ' מגרל
מתרגלים: מני וסולי

תרגיל בית מספר 6

<u>שאלה 1</u>

כזכור נאמר שמרחב טופולוגי הוא ממימד אפס אם קיים בסיס לטופולוגיה המורכב מקבוצות סגוחות.

א) הוכיחו כי $B=\left\{a+5^n\mathbb{Z}: \quad a\in\mathbb{Z}, \quad n\in\mathbb{N}\right\}$ בסיס למרחב המטרי $\left(\mathbb{Z},d_5\right)$
(d_5 המטריקה ה-5-אדית).

ב) הוכיחו כי $\left(\mathbb{Z},d_5\right)$ ממימד אפס.

<u>שאלה 2</u>

א. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה בת מניה. הוכיחו ש- $\operatorname{int}\left(A\right)=\varnothing$.

ב. מצאו: $\operatorname{int}\left(\mathbb{Q}\right), cl\left(\mathbb{Q}\right)$ (ב- $\mathbb{R}$)

ג. הוכיחו ש- $A:=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \quad x_1=0\}$ סגורה ב $\mathbb{R}^n$ ו- $\operatorname{int}(A)=\varnothing$

<u>שאלה 3</u>

הוכיחו שבכל מרחב נורמי מתקיים $cl\left(B(a,r)\right)=B[a,r]$. מצאו דוגמא נגדית עבור מרחב מטרי.

<u>שאלה 4</u>

יהיו T_1,T_2 טופולוגיות על X כך ש- $T_1\subseteq T_2$. הוכיחו:

א. F סגורה ב- $\left(X,T_1\right)$ $\Leftarrow$ F סגורה ב- $\left(X,T_2\right)$.

נסמן ב- $\operatorname{int}_{T_i}\left(A\right)$ את הפנים של A במרחב $\left(X,T_i\right)$ (כנ"ל עבור $cl_{T_i}\left(A\right)$).

ב. הוכיחו או הפריכו: $\operatorname{int}_{T_1}\left(A\right)\subseteq\operatorname{int}_{T_2}\left(A\right)$, $cl_{T_1}\left(A\right)\supseteq cl_{T_2}\left(A\right)$

היעזרו (בין השאר) במה שהוכחתם על היחס בין הטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$ לבין הטופולוגיה של סורגנפריי וענו על הסעיף הבא:

ג. יהי $\left(\mathbb{R},T\right)$ הישר של סורגנפריי. מצאו פנים וסגור של הקבוצות הבאות

$$\left(0,1\right],\left(0,1\right),\left[0,1\right],\left[0,1\right)$$

<u>שאלה 5</u>

תהי X קבוצה אינסופית. יהי x_0 איבר ב X. נגדיר

$\tau = \{A \subseteq X: x_0 \notin A\} \bigcup \{B \subseteq X : X \setminus B \ is \ finite\}$.

א) הוכיחו ש τ טופולוגיה על X.

ב) הראו שכל הנקודונים ב- X, פרט ל- $\{x_0\}$, הינם פתוחים וסגורים. מה לגבי $\{x_0\}$?

ג) הראו: $cl(A) = \begin{cases} A & A \ is \ finite \\ A \cup \{x_0\} & otherwise \end{cases}$

ד) הראו: $int(A) = \begin{cases} A & X \setminus A \ is \ finite \\ A \setminus \{x_0\} & otherwise \end{cases}$

<u>בונוס:</u>

יהי ו (X, τ) מ"ט. $A \subseteq X$ ו $a \in X$. נאמר ש:

א) a נקודת הצטברות של A אם $a \in cl(A \setminus \{a\})$

ב) a נקודת הצטברות סדרתית של A אם קיימת סדרה $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{a\}$ כך ש $x_n \to a$.

1) מצאו דוגמא למ"ט (X, τ) לקבוצה $A \subseteq X$ ולנקודה $a \in X$ שהינה נקודת הצטברות של A אך אינה נקודת הצטברות סדרתית של A.

2) האם קיימת דוגמא כמו בסעיף 1 של מרחב טופולוגי מטריזבילי?

בהצלחה!