88-341-01
ט"ז בשבט תשע"ב
מרצה: ש. הורוביץ

# מבחן באנליזה מודרנית 1
## מועד א'

ענו על כל השאלות הבאות. כל הגדרה או ציטוט שווה 7 נקודות, וכל הוכחה שווה 12 נקודות. חומר עזר אסור. משך הבחינה שלוש שעות. בהצלחה!

1. א. הגדירו את המידה החיצונית של לבג על $\mathbb{R}$
ב. הגדירו פונקציות מדידות לבג על $\mathbb{R}$.
ג. הגדירו פונקציות רציפות בהחלט $f:[a,b]\to\mathbb{R}$
ד. צטטו את החצי השני של המשפט היסודי של חשבון אינטגרלי, בגירסת לבג.
ה. הוכיחו שאם $f$ ו- $g$ רציפות בהחלט ב- $[a,b]$ אז אפשר לקיים אינטגרציה בחלקים ביחס למידת לבג $dm$:

$$\int_{[a,b]} fg'dm = fg\Big]_a^b - \int_{[a,b]} f'gdm$$

2. א. צטטו את משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג.
ב. צטטו את משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג.
ג. צטטו את למת פאטו.
ד. יהי $(X,S,u)$ מרחב מידה חיובית ותהי $f:X\to[0,\infty]$ פונקציה אינטגרבילית $du$. תהי $\{f_n\}$ סדרה יורדת של פונקציות מדידות-$S$ כך שלכל $x\in X$, $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ הוכיחו ש- $\int_X fdu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n du$ אמ"ם קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $f_n$ אינטגרבילית $du$.

3. א. הגדירו מרחבי $L^p(du)$, $1\le p\le\infty$
ב. צטטו את אי שוויון הולדר במקרה $1<p<\infty$.
ג. יהי $(X,S,u)$ מרחב מידה חיובית ותהי $f_n:X\to\mathbb{R}$ סדרת פונקציות ב- $L^1(du)$ כך שלכל $x\in X$ קיים גבול $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$. הוכיחו ש- $f_n\to f$ ב- $L^1(du)$ אמ"ם $\lim_{n\to\infty}\int_X|f_n|du=\int_X|f|du$.

ד. נגדיר $T:C([0,1])\to\mathbb{R}$ ע"י $T(f)=f(0)$. הוכיחו שאם נגדיר על $C([0,1])$ את הנורמה הרגילה, אז $T$ רציף, אבל אם נגדיר על $C([0,1])$ את נורמת $L^2$ ביחס למידת לבג, אז $T$ לא רציף.

88-341-01
כ"ד אדר תשע"ב
מרצה: ש. הורוביץ

# מבחן באנליזה מודרנית 1
## מועד ב'

ענו על כל השאלות הבאות. כל סעיף שווה 8 נקודות. חומר עזר אסור. משך הבחינה שלוש שעות. בהצלחה!

1. יהי $(X,S,\mu)$ מרחב מידה חיובית.
   א. הגדירו פונקציה מדידה $S$.
   ב. הגדירו פונקציה אינטגרבילית $d\mu$.
   ג. צטטו את משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג, ב- $(X,S,\mu)$
   ד. תהי $f_n : X \to \mathbb{R}$ סדרת פונקציות מדידות - $S$. נניח ש- $\sum_{n=1}^{\infty}\int_X |f_n| du < \infty$.
   הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס כב"מ $(du)$.

2. א. צטטו את המשפט המאפיין קבוצות מדידות ביחס ל"מידת המכפילה" $u \times v$.
   ב. צטטו את משפט פוביני.
   ג. תהי $m$ מידת לבג ו- $u$ מידת הספירה על הקטע $K=[0,1]$. ניצור את מידת המכפילה $w = m \times u$ על $K \times K$. הוכיחו שהאלכסון
   $A = \{(x,y) \in K \times K : x = y\}$
   קבוצה מדידה $dw$. (הדרכה: הוכיחו ש- $A$ מטיפוס $R_{\sigma\delta}$)
   ד. בנתונים של סעיף ג', הראו ששלושת האינטגרלים $\int_{K\times K} I_A dw$,
   $\int_K \left[\int_K I_A(x,y) dm(x)\right] du(y)$ ו- $\int_K \left[\int_K I_A(x,y) du(y)\right] dm(x)$ כולם שונים זה מזה.
   ה. הסבירו מדוע התוצאה של סעיף ד' אינה סותרת את משפטי פוביני וטונלי.

3. א. הגדירו מרחבי $L^p[d\mu]$ $1 \le p \le \infty$ ביחס למידה כלשהי.
   ב. הגדירו מרחב בנך.
   ג. הוכיחו ש- $L^{\infty}(du)$ מרחב שלם.
   ד. הגדירו את $l^p$ $1 \le p \le \infty$, והוכיחו ש- $l^1 \subset l^{\infty}$
   ה. הוכיחו שאם נשרה את נורמת $l^{\infty}$ על $l^1$ אז הוא לא מרחב שלם.

88-341-01
כ' בשבט תשע"ג
מרצה: ש. הורוביץ

# מבחן באנליזה מודרנית 1
## מועד א'

ענו על כל השאלות הבאות. כל ציטוט שווה 6 נקודות, וכל הוכחה שווה 10 נקודות חומר עזר אסור. משך הבחינה שלוש שעות. בהצלחה!

1. א. הגדירו את המידה החיצונית של לבג על $\mathbb{R}$
ב. הגדירו פונקציות מדידות לבג על $\mathbb{R}$.
ג. הגדירו קבוצות בורל ב- $\mathbb{R}$.
ד. נניח שלכל $n$ $E_n$ היא תת-קבוצה כלשהי של הקטע $(3n+1,3n+2)$.
הוכיחו ש- $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$.

2. א. צטטו את משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג.
ב. צטטו את משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג.
ג. צטטו את למת פאטו.
ד. יהי $(X,S,\mu)$ מרחב מידה חיובית ותהי $f_n : X \to [0,\infty]$ סדרת פונקציות מדידות $du$. נניח ש- $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n du = 0$. הוכיחו שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ $\mu(\{x \in X : f_n(x) > \varepsilon\}) < \varepsilon$.

3. א. הגדירו מרחבי $L^p(d\mu)$, $1 \le p \le \infty$
ב. צטטו את אי שוויון הולדר במקרה $1 < p < \infty$.
ג. הוכיחו שאם $f \in L^1(d\mu)$ ואם $g \in L^\infty(d\mu)$ אז $fg \in L^1(d\mu)$. נסחו והוכיחו אי-שויון מטיפוס הולדר עבור המקרה הזה, וקבעו מתי יש בו שויון.

4. א. הגדירו פונקציות בעלות השתנות חסומה בקטע סגור.
ב. להוכיח או להפריך: לפונקציה $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ יש השתנות חסומה בקטע $[0,1]$.
ג. הגדירו פונקציות רציפות בהחלט בקטע $I \subset \mathbb{R}$.
ד. להוכיח או להפריך: אם לכל $n \in \mathbb{N}$ $f_n(x)$ היא פונקציה רציפה בהחלט בקטע $[a,b]$ ואם קיים $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ במידה שווה ב- $[a,b]$, אז $f(x)$ רציפה בהחלט ב- $[a,b]$.

קורס: 88-341-01
י' אדר תשע"ג
מרצה: ש. הורוביץ

# מבחן באנליזה מודרנית 1
## מועד ב'

ענו על כל השאלות הבאות. כל ציטוט שווה 7 נקודות, וכל הוכחה שווה 14 נקודות. חומר עזר אסור. משך הבחינה שלוש שעות.

1. א. הגדירו פונקציה רציפה בהחלט על קטע $[a,b]$.
ב. צטטו את הכללת לבג למשפט היסודי של חשבון אינפיניטסמלי (שני חלקים).
ג. נניח ש- $\{f_n\}$ היא סדרת פונקציות רציפות בהחלט בקטע $[a,b]$, כך שלכל $x\in[a,b]$ קיים הגבול $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$. עוד נניח שקיים קבוע $M>0$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ $|f_n'(x)|\le M$. להוכיח או להפריך: $f(x)$ רציפה בהחלט ב- $[a,b]$.

2. א. הגדירו פונקציה בעלת השתנות חסומה בקטע $[a,b]$.
ב. הוכיחו ש- $\|f\|=|f(a)|+T_a^b(f)$ נורמה על המרחב $BV([a,b])$.

3. א. צטטו את האפיון של קבוצות מדידות ביחס למידת מכפילה $\mu x\nu$.
ב. צטטו את משפט פוביני (רק הנתונים והטענה העיקרית טענה ה')
ג. צטטו את משפט טונלי (רק הנתונים והטענה העיקרית טענה ה')
ד. נגדיר $f(x,y)=\begin{cases}1/x^2: & x>y\ge 0\\ -1/y^2: & y>x\ge 0\\ 0: & x=y\end{cases}$. הראו ש-
$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy\neq\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx.$$
הסבירו מדוע התוצאה אינה סותרת לא את משפט פוביני ולא את משפט טונלי.

4. א. הגדירו מרחב הילברט.
ב. צטטו את משפט ההצגה של ריס.
ג. יהי H מרחב הילברט, ויהי $M\subset H$ תת-מרחב. נגדיר $M^\perp$ להיות $\{x\in H:(x,y)=0\ \forall y\in M\}$. הוכיחו ש- $M=(M^\perp)^\perp$ אם ורק אם $M$ סגור.

בהצלחה!