הרצאה 10: קונבולוציה ומשפט בורל.

הפיכת התמרת לפלס

1. קונבולוציה וקומוטטיביה

הגדרה 1.1

יהיו $f(t)$ ו $\varphi(t)$ מוגדרות ורציפות למקוטעין לכל $t\in\mathbb{R}$.
קונבולוציה $(f*\varphi)(t)$ של הפונקציות הנ"ל הינה פונקציה חדשה של $t\in\mathbb{R}$, המוגדרת ע"י השוויון:

$$(f*\varphi)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\varphi(t-\xi)\,d\xi,\qquad t\in\mathbb{R}\qquad(1.1)$$

משפט 1.1

יהיו $f(t)$ ו- $\varphi(t)$ מקוריות, אזי הקונבולוציה שלהם $(f*\varphi)(t)$ גם כן פונקציה-מקור, ומעריך הגידול שלה $\sigma\le\max\{\sigma(f),\sigma(\varphi)\}$,

$$(f*\varphi)(t)=\int_{0}^{t} f(\xi)\varphi(t-\xi)\,d\xi\qquad(1.2)$$

מעבר לכך, הפונקציה $(f*\varphi)(t)$ רציפה ו-

$$(f*\varphi)(t)=(\varphi*f)(t)\qquad(1.3)$$

הוכחה:

(1) אם $f(t)$ ו- $\varphi(t)$ מקוריות, אזי $\varphi(t-\xi)\equiv 0$ עבור $\xi>t$
ו- $f(\xi)\equiv 0$ עבור $\xi<0$ $\Leftarrow$

$$(f*\varphi)(t)=\underbrace{\int_{-\infty}^{0}\dots}_{=0}+\int_{0}^{t}\dots+\underbrace{\int_{t}^{\infty}\dots}_{=0}=\int_{0}^{t} f(\xi)\varphi(t-\xi)\,d\xi$$

(2)
$$(f*\varphi)(t)=\int_{0}^{t} f(\xi)\varphi(t-\xi)\,d\xi=\left|\begin{matrix}t-\xi=s\\ \xi=t-s\end{matrix}\right|=$$

$$=-\int_{t}^{0} f(t-s)\varphi(s)\,ds=\int_{0}^{t}\varphi(s)f(t-s)\,ds=(\varphi*f)(t)$$

כעת, נבדוק כי $(f*\varphi)$ - מקור.

(א') כיוון ש- $f(\xi)\equiv 0$ עבור $\xi<0$, אזי מ- (1.2) נקבל,
ש- $(f*\varphi)(t)\equiv 0$ עבור $t<0$

(ב') נוכיח שהפונק' $(f*\varphi)(t)$ רציפה עבור $t\in\mathbb{R}$.

נצטרך לצורך כך את המשפט הבא

משפט 1.2 תהי $f(x)$ פונק' רציפה למקוטעין המוגדרת על $[a,b]$, $b-a<\infty$. נסמן $M=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$.
אזי עבור כל $\varepsilon>0$ קיימת פונקציה $\varphi(x)$, $x\in[a,b]$ דיפרנציאבילית באופן רציף, כך ש:

$$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx \le \varepsilon \qquad (1.4)$$

הוכחה: תהי

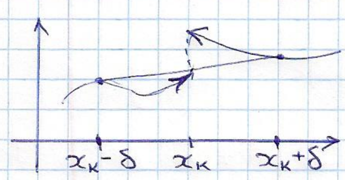
$$\tilde f(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$$

נסמן $\{x_k\}$, $k=1,..,n$, $n<\infty$ נק' אי רציפות (מסוג 1, אין נק' אחרות מסוג אחר) של הפונקציה $\tilde f(x)$.

נניח: $\Delta_k^{\pm}=x_k\pm\delta$, $k=1,...,n$

$\delta>0$, $k=1,..,n$, $\Delta_k=[x_k-\delta,\, x_k+\delta]$ (δ-ניתנת לבחירה),

$$\tilde\varphi(x)=\begin{cases}\tilde f(x), & x\notin \bigcup_{k=1}^{n}\Delta_k\\ \dfrac{\tilde f(\Delta_k^+)-\tilde f(\Delta_k^-)}{\Delta_k^+-\Delta_k^-}(x-\Delta_k^-)+\tilde f(\Delta_k^-), & x\in\Delta_k,\ k=1,..,n\end{cases}$$



אזי ברור כי $|\tilde\varphi(x)|\le 2M$ וחיץ
מכאן הפונק' $\tilde\varphi(x)$ רציפה על
כל ציר המספרים. מעבר לכך,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde f(x)-\tilde\varphi(x)|\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{\Delta_k}|\tilde f(x)-\tilde\varphi(x)|\,dx\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\int_{\Delta_k}\left(|\tilde f(x)|+|\tilde\varphi(x)|\right)dx\le 3M\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta_k^+-\Delta_k^-\right)=$$

$$=3M\cdot 2\delta=\boxed{6M\delta} \qquad (1.5)$$

כעת, תהי

$$\varphi(x)=\frac{1}{2d}\int_{x-d}^{x+d}\tilde\varphi(t)\,dt,\quad d>0 \quad \left(\text{ניתנת לבחירה}\right)$$

ברור ש- $\varphi'(x)$ קיימת ורציפה:

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2d}\left[\tilde\varphi(x+d)-\tilde\varphi(x-d)\right]$$

$$\Longrightarrow\ \boxed{|\varphi'(x)|\le\frac{2M}{d}}$$

כעת נניח לפי כי $\tilde{f}(x)$ פונק' קומפקטית

$\Leftarrow$ $\tilde{\varphi}(x)$ - קומפקטית $\Leftarrow$ $\varphi(x)$ - קומפקטית. יהי

$[a_1,b_1]=\operatorname{supp}\varphi(x)$, אזי $\forall\varepsilon\ \exists d=d(\varepsilon)>0$ כך ש (משפט קנטור):

$$|\tilde{\varphi}(t)-\tilde{\varphi}(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{b_1-a_1}\qquad,\ |t-x|\le d(\varepsilon),\ x\in[a_1,b_1]$$

כיוון ש- $\operatorname{supp}\tilde{\varphi}\subseteq\operatorname{supp}\varphi$, אזי

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{\varphi}(x)-\varphi(x)|\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\tilde{\varphi}(x)-\frac{1}{2d}\int_{x-d}^{x+d}\tilde{\varphi}(t)\,dt\Big|\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\frac{1}{2d}\int_{x-d}^{x+d}\tilde{\varphi}(x)\,dt-\frac{1}{2d}\int_{x-d}^{x+d}\tilde{\varphi}(t)\,dt\Big|\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2d}\Big|\int_{x-d}^{x+d}(\tilde{\varphi}(x)-\tilde{\varphi}(t))\,dt\Big|\,dx\le\int_{a_1}^{b_1}\frac{1}{2d}\Big(\int_{x-d}^{x+d}|\tilde{\varphi}(t)-\tilde{\varphi}(x)|\,dt\Big)dx$$

$$\le\frac{\varepsilon}{4d}\frac{1}{(b_1-a_1)}\int_{a_1}^{b_1}(2d)\,dx=\frac{\varepsilon}{2}(b_1-a_1)\frac{1}{b_1-a_1}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

נבחר כעת δ ב-(1.5) כך ש- $6M\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ $\Leftarrow$

$$\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\,dx\le\int_a^b|f(x)-\tilde{\varphi}(x)|\,dx+\int_a^b|\tilde{\varphi}(x)-\varphi(x)|\,dx$$

$$\le\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(x)-\tilde{\varphi}(x)|\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{\varphi}(x)-\varphi(x)|\,dx\le6M\delta+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

■

כעת נראה, שאם $f(t)$ ו- $\varphi(t)$ מקוריות, אזי $(f*\varphi)(t)$ -

פונקציה רציפה. נתבונן בהבדלת $t+h$ הקונבולוציה בנקודה t:

$$(f*g)(t+h)-(f*g)(t)=\int_0^{t+h}f(\xi)g(t+h-\xi)\,d\xi-\int_0^t f(\xi)g(t-\xi)\,d\xi=$$

$$=\int_t^{t+h}f(\xi)g(t+h-\xi)\,d\xi+\int_0^t f(\xi)[g(t+h-\xi)-g(t-\xi)]\,d\xi$$

בכל קטע $[0,T]$ הפונק' $g(t),f(t)$, כמקוריות, חסומות ע"י

מספר M כלשהו. אזי עבור $t<T$ גם $|h|<T-t$, נקבל:

$$|(f*g)(t+h)-(f*g)(t)|\le\int_t^{t+h}\underbrace{|f(\xi)|}_{\le M}\underbrace{|g(t+h-\xi)|}_{\le M}\,d\xi+$$

$$+\int_0^t\underbrace{|f(\xi)|}_{\le M}|g(t+h-\xi)-g(t-\xi)|\,d\xi\le$$

$$\le M^2h+M\int_0^t|g(t+h-\xi)-g(t-\xi)|\,d\xi=|t-\xi=s|=$$

$$=M^2h+M(-1)\int_t^0|g(h+s)-g(s)|\,ds=M^2h+M\int_0^t|g(h+s)-g(s)|\,ds$$

כיוון ש- $g(t)$ רציפה למקוטעין, אזי לפי משפט 1.2 קיימת עבור $\varepsilon>0$ נתון פונקציה $\varphi(t)$, בעלת נגזרת רציפה, ו-

$$\int_0^T |g(\xi)-\varphi(\xi)|\,d\xi \le \varepsilon \quad , \quad |\varphi'(t)| \le K < \infty$$

אזי:

$$\int_0^t |g(s+h)-g(s)|\,ds = \int_0^t |g(s+h)-\varphi(s+h)|\,ds + \int_0^t |\varphi(s+h)-\varphi(s)|\,ds +$$

$$+ \int_0^t |g(s)-\varphi(s)|\,ds \le 2\int_0^T |g(\xi)-\varphi(\xi)|\,d\xi + \int_0^t |\varphi(s+h)-\varphi(s)|\,ds \le$$

$$\le \Big| \, |\varphi(s+h)-\varphi(s)| = |\varphi'(\theta)||h| \le K|h| \quad \Big| \text{ לפי משפט לגרנז'}$$

$$\le 2\varepsilon + \int_0^t Kh\,d\xi = 2\varepsilon + KT|h| \le \quad \Big| \, KT|h| \le \varepsilon \Leftarrow \frac{\text{בחירת}}{h} \Big|$$

$$\le 2\varepsilon + \varepsilon = \underline{\underline{3\varepsilon}} \quad \Longrightarrow$$

עבור $\varepsilon>0$ קבוע מצאנו $\delta = \frac{\varepsilon}{KT}$ כך ש-

$$|(f*g)(t+h) - (f*g)(t)| \le 3\varepsilon \qquad \forall\ |h| \le \delta = \frac{\varepsilon}{KT} \quad \Longrightarrow$$

$(f*\varphi)(t)$ פונקציה רציפה.

נשאר לנו להראות, שמעריך הגידול של הפונק' $(f*g)(t)$ הינו $\sigma \le \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$, אם מעריך הגידול של $f(t)$ שווה ל- σ_1, ומעריך הגידול של g שווה ל- σ_2. נתון, כי עבור $\varepsilon>0$ (קבוע) מתקיימים האי שוויונות:

$$|f(t)| \le c(\varepsilon)e^{(\sigma_1+\varepsilon)t}, \quad |g(t)| \le c(\varepsilon)\cdot e^{(\sigma_2+\varepsilon)t}, \quad t\ge 0 \quad \Longrightarrow$$

$$|f(t)| \le c(\varepsilon)e^{(\sigma+\varepsilon)t}, \quad |g(t)| \le c(\varepsilon)e^{(\sigma+\varepsilon)t}, \quad t \ge 0 \quad \Longrightarrow$$

$$|(f*g)(t)| \le c(\varepsilon)^2 \int_0^t e^{(\sigma+\varepsilon)\xi}\cdot e^{(\sigma+\varepsilon)(t-\xi)}\,d\xi =$$

$$= c(\varepsilon)^2 \int_0^t \underbrace{\underbrace{e^{(\sigma+\varepsilon)\xi}}\cdot e^{(\sigma+\varepsilon)t}\cdot\underbrace{e^{-(\sigma+\varepsilon)\cdot\xi}}}_{1}\,d\xi = c(\varepsilon)^2 + e^{(\sigma+\varepsilon)t}$$

נקבע $\delta>0$. אזי קיים $c_1(\delta)$ כך ש-

$$c(\varepsilon)^2 t \le c_1(\delta)e^{\delta t} \quad \Longrightarrow \quad c(\varepsilon)^2 t\, e^{-\delta t} \le c_1(\delta) \quad \Longrightarrow$$

$$|(f*g)(t)| \le \left(c(\varepsilon)^2 t e^{-\delta t} \right) e^{(\sigma+\varepsilon+\delta)t} \le c_1(\delta) e^{(\sigma+\varepsilon+\delta)t}$$

כאן הסכום $\varepsilon+\delta := \varepsilon_1 > 0$ יכול להיות קטן כרצוננו

מ.ש.ל. ▨

<u>תרגיל 1</u> חשב $(e^t)*(t)$

<u>פתרון</u>

$$(e^t * t) = \int_0^t e^{\xi}(t-\xi)\,d\xi = t\int_0^t e^{\xi}d\xi - \int_0^t e^{\xi}\cdot\xi\, d\xi =$$

$$= t\left(e^{\xi}\Big|_0^t\right) - \left[e^{\xi}\cdot\xi\Big|_0^t - \int_0^t e^{\xi}d\xi\right] = t(e^t-1) - \left[t\cdot e^t - e^t + 1\right] =$$

$$= t\cdot e^t - t - te^t + e^t - 1 = \boxed{e^t - t - 1}$$

<u>תרגיל 2</u>

יהיו n,m - מספרים טבעיים (כלומר $n\ge1, m\ge1$ שלמים)

מצא $(t^n * t^m)$

<u>פתרון</u>

$$t^n * t^m = \int_0^t \xi^n (t-\xi)^m d\xi = \left| \xi = t\cdot s \right| = \int_0^1 t^n s^n (t-ts)^m \cdot t\, ds =$$

$$= t^{n+m+1} \underbrace{\int_0^1 s^n (1-s)^m ds}_{\text{אוילר}} = t^{n+m+1} B(n+1, m+1)$$

נחשב את האינטגרל הנ"ל.

$$\int_0^1 s^n(1-s)^m ds = \int_0^1 (1-s)^m\, d\frac{s^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} s^{n+1}(1-s)^m\Big|_0^1 + \frac{m}{n+1}\int_0^1 s^{n+1}(1-s)^{m-1}ds \quad \Longrightarrow$$

$$\int_0^1 s^n(1-s)^m ds = \frac{m}{n+1}\int_0^1 s^{n+1}(1-s)^{m-1}ds =$$

$$= \frac{m(m-1)}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 s^{n+2}(1-s)^{m-2}ds = \ldots =$$

$$= \frac{m(m-1)\cdots 2\cdot 1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\int_0^1 s^{n+m}ds = \frac{m!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m+1)} \boxed{= \frac{n!\,m!}{(n+m+1)!}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{t^n * t^m = \frac{n!\,m!}{(n+m+1)!}\, t^{n+m+1}}$$

▨

נפרט כעת את התכונות העיקריות הנוספות של הקונבולוציה (ללא הוכחה)

1. קומוטטיביות $f*g = g*f$ (ראה לעיל)
2. אסוציאטיביות $(f*g)*\psi = f*(g*\psi)$
3. דיסטריבוטיביות ביחס לחיבור $\psi*(f+g)=\psi*f+\psi*g$
4. $|f*g| \le |f|*|g|$
5. <u>משפט טיטצ'מרש</u>

אם $f(t)$ ו- $g(t)$ רציפות ו- $f*g=0$, אזי לפחות אחת מהפונקציות הנ"ל f או g שווה לאפס עבור $t\ge 0$.

2. משפט פוביני

נצטרך את הטענה הפשוטה הבאה.

<u>משפט 2.1</u> (נוסחת דירכלה)

תהי $f(x,y)$ פונק' רציפה של שני משתנים בתחום $D=\{(x,y): x\ge 0,\ y\ge 0\}$. אזי אם

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x |f(x,y)|\,dy \right) dx < \infty \qquad (5.1)$$

אזי מתקיים השוויון:

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^\infty \left(\int_y^\infty f(x,y)\,dx \right) dy \qquad (5.2)$$

<u>הוכחה</u>

פיתוח של נוסחת דירכלה מבוסס על הטענה הבאה, שנקראת מסקנה ממשפט פוביני.

<u>משפט 2.2</u>

(1) תהי $f(x,y)$ פונק' רציפה של שני משתנים, המוגדרת בתחום D

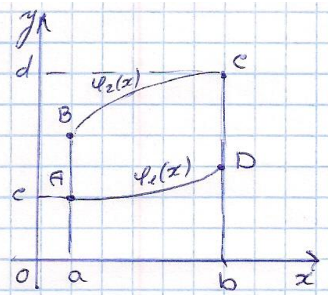
(2) יהי D תחום הניתן להגדרה בשני אופנים (שקולים):

$$D=\{(x,y):\ x\in[a,b],\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\},\quad \boxed{-\infty\le a<b\le\infty}$$

$$D=\{(x,y):\ y\in[c,d],\ \psi_1(\ )\le x\le \psi_2(y)\},\quad \boxed{-\infty\le c<d\le\infty}$$

(3) הישרים $x=x_0,\ x_0\in[a,b];\ y=y_0,\ y_0\in[c,d]$ חותכים את שפת D בשתי נקודות לכל היותר.

לכן אם מתקיים אי השוויון:

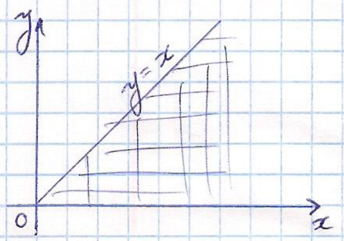


$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} |f(x,y)|\,dy \right) dx < \infty \qquad (5.3)$$

אזי מתקיים השוויון:

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy \qquad (5.4)$$

עבור הוכחת נוסחת דירכלה אין צורך - לפי משפט 2, רק לשנות את סדר האינטגרציה באינטגרל השמאלי של (5.2).



אכן: $D = \{(x,y) : x \in [0,\infty),\ 0 \le y \le x\}$

תאור של D דרך y:

$D = \{(x,y) : y \in [0,\infty),\ y \le x \le \infty\}$

אזי לפי (5.4) נקבל:

$$\int_0^\infty \left[\int_0^x f(x,y)\,dy \right] dx = \int_0^\infty \left[\int_y^\infty f(x,y)\,dx \right] dy$$

הוכחת הנכונות של (5.3) במשפט 2.2 שקול ל-(5.1) במשפט 2.1.

$\blacksquare$

משפט 2.3 (בורל)

תהי $f(t) \to F(p)$ עבור $\mathrm{Re}\,p > \sigma_1$ (σ_1 מעריך הגידול של $f(t)$)

$g(t) \to G(p)$ עבור $\mathrm{Re}\,p > \sigma_2$ (σ_2 מעריך הגידול של $g(t)$)

אזי מתקיימת התאמה פעולתית הבאה:

$$f * g \to F(p)\cdot G(p) \quad \text{עבור} \quad \mathrm{Re}\,p > \sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\} \qquad (5.5)$$

הוכחה

נוכיח את המשפט הנ"ל עם הנחה נוספת:

הפונק' $f(t)$ ו- $g(t)$ מקוריות **רציפים**. לכן, כיוון שקונבולוציה של מקוריות $f(t) * g(t)$ גם כן מקור עם מעריך הגידול $\gamma \le \sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ (ראה סעיף 1),

לכן ניתן להפעיל עליה התמורת לפלס (עבור $\mathrm{Re}\,p > \sigma \ge \gamma$)

$$\Phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} (f*g)(t)\,dt = \left| (f*g)(t) = \int_0^t f(\xi) g(t-\xi)\,d\xi \right| =$$

$$= \int_0^\infty e^{-pt} \left(\int_0^t f(\xi) g(t-\xi)\,d\xi \right) dt \qquad (5.6)$$

בהתאם, עבור $\forall \varepsilon > 0$ קיים $c(\varepsilon)$ רק ש-

$$|f(\xi)| \le c(\varepsilon) e^{(\sigma_1+\varepsilon)\xi} \le c(\varepsilon) e^{(\sigma+\varepsilon)\xi}, \quad \xi \ge 0$$

$$|g(t-\xi)| \le c(\varepsilon) e^{(\sigma_2+\varepsilon)(t-\xi)} \le c(\varepsilon) e^{(\sigma+\varepsilon)(t-\xi)}, \quad \infty > t \ge \xi \ge 0$$

לכן:

$$\int_0^\infty \left(\int_0^t |e^{-pt} f(\xi) g(t-\xi)| d\xi \right) dt \le c(\varepsilon)^2 \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-\mathrm{Re}\,p\,t} \cdot e^{(\sigma+\varepsilon)\xi} \cdot e^{(\sigma+\varepsilon)(t-\xi)} d\xi \right) dt =$$

$$= c(\varepsilon)^2 \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-[\mathrm{Re}\,p - (\sigma+\varepsilon)]t} \cdot \underbrace{e^{(\sigma+\varepsilon)\cdot\xi} \cdot e^{-(\sigma+\varepsilon)\xi}}_{1} d\xi \right) dt =$$

$$= c(\varepsilon)^2 \int_0^\infty e^{-[\mathrm{Re}\,p - (\sigma+\varepsilon)]t} \cdot t\, dt \qquad (5.7)$$

נקבע $\varepsilon > 0$ רק ש- $\mathrm{Re}\,p - (\sigma+\varepsilon) > \frac{\varepsilon}{2}$ נקבל כי האינטגרל $\Phi(p)$ (ראה (5.6) ו- (5.7)) מתכנס בהחלט.

אזי ניתן להשתמש בנוסחת דירכלה:

$$\Phi(p) = \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-pt} f(\xi) g(t-\xi) d\xi \right) dt = \int_0^\infty \left(\int_\xi^\infty e^{-pt} f(\xi) g(t-\xi) dt \right) d\xi =$$

$$= \int_0^\infty f(\xi) \left(\int_\xi^\infty e^{-pt} g(t-\xi) dt \right) d\xi = \left| t-\xi := s \right| =$$

$$= \int_0^\infty f(\xi) \left(\int_0^\infty e^{-p(\xi+s)} g(s) ds \right) d\xi = \int_0^\infty f(\xi) e^{-p(\xi)} \left(\int_0^\infty e^{-ps} g(s) ds \right) d\xi =$$

$$= \left(\int_0^\infty f(\xi) e^{-p\xi} d\xi \right) \left(\int_0^\infty e^{-ps} g(s) ds \right) = F(p) G(p)$$

▨

<u>תרגיל 1</u>

בדוק משפט בורל עבור $f = \sin t$, $g(t) = t$

<u>פתרון</u>

$$(\sin t) * t = \int_0^t (\sin\xi)(t-\xi) d\xi = -\int_0^t (t-\xi) d\cos\xi = -(t-\xi)\cos\xi \Big|_0^t +$$

$$+ \int_0^t (t-\xi)' \cos\xi\, d\xi = t - \int_0^t \cos\xi\, d\xi = t - \sin\xi \Big|_0^t = t - \sin t \implies$$

$$((\sin t) * t) = t - \sin t \longrightarrow \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p^2(p^2+1)}$$

לפי משפט בורל נקבל:

$$t = t^n \Big|_{n=1} \longrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}} \Big|_{n=1} = \frac{1}{p^2}, \quad \sin t \longrightarrow \frac{1}{p^2+1} \implies$$

$$(t * \sin t) \longrightarrow \frac{1}{p^2(p^2+1)}$$

▨

תרגיל 2

מצא את התמונה עבור $t^n * t^m$, $n,m \in \mathbb{N}$

פתרון 1

כיוון ש: $t^n \longrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$, $t^m \longrightarrow \frac{m!}{p^{m+1}}$

<= לפי משפט בורל:

$$\boxed{t^n * t^m \longrightarrow \frac{n!m!}{p^{n+m+2}}}$$

פתרון 2

הוכחנו לעיל (סעיף 1), כי

$$t^n * t^m = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}\, t^{n+m+1}$$

כיוון ש: $t^k \longrightarrow \frac{k!}{p^{k+1}}$ <=

$$t^n * t^m = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}\, t^{n+m+1} \longrightarrow \frac{n!m!}{(n+m+1)!}\,\frac{(n+m+1)!}{p^{n+m+2}} =$$

$$= \boxed{\frac{n!m!}{p^{n+m+2}}}$$

תרגיל 3

מצא מקור רציף $f(t)$ כך ש

$$f(t) \longrightarrow \frac{p\omega}{(p^2+\omega^2)^2} = F(p)$$

פתרון

מפרקים $F(p)$ למכפלה של תמונות ידועות

$$F(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$ <= כיוון ש-

$$\left.\begin{aligned} \cos\omega t &\to \frac{p}{p^2+\omega^2} \\ \sin\omega t &\to \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos\omega t * \sin\omega t \longrightarrow \frac{p}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2} = F(p)$$

כיוון שקונבולוציה של מקורות - מקור רציף, אזי הפונקציה $\cos\omega t * \sin\omega t$ - פתרון יחיד של הבעיה לפי משפט היחידות.

נשאר לחשב את הקונבולוציה:

$$\cos\omega t * \sin\omega t = \int_0^t (\cos\xi\omega)\sin\omega(t-\xi)\,d\xi = \left|\begin{aligned} &\sin\alpha\cos\beta = \\ &= \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}\end{aligned}\right|$$

$$= \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-\xi)+\omega\xi)+\sin(\omega(t-\xi)-\omega\xi)}{2}\,d\xi =$$

$$= \int_0^t \frac{\sin\omega t+\sin\omega(t-2\xi)}{2}\,d\xi = \frac{t\sin\omega t}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \sin\omega(t-2\xi)\,d\xi = \frac{t\cdot\sin\omega t}{2}+\frac{1}{4\omega}\left[\cos\omega(t-2\xi)\Big|_0^t\right]=$$

$$= \frac{t\sin\omega t}{2}+\frac{1}{4\omega}\{\underbrace{\cos(-\omega t)-\cos\omega t}_{=0}\} = \frac{t\sin\omega t}{2}$$

תרגיל 4 (על הערכה)

מצא מקור רציף $f(t)$ כך ש

$$f(t)\to\frac{1}{(p-a)(p-b)}\ ,\quad a\neq b,\quad a,b\in\mathbb{R}$$

פתרון

לפי משפט ההזזה $e^{p_0t}f(t)\to F(p-p_0)$, כאשר $(f(t)\to F(p))$

ידוע: $(1\to\frac{1}{p})$

$$\begin{cases} e^{at}=e^{at}\cdot 1\to\frac{1}{p-a} \\ e^{bt}=e^{bt}\cdot 1\to\frac{1}{p-b}\end{cases}$$

<= לפי משפט בורל: $e^{at}*e^{bt}\to\frac{1}{(p-a)(p-b)}$

<= נמצא $e^{at}*e^{bt}$:

$$e^{at}*e^{bt}=\int_0^t e^{a\xi}\cdot e^{b(t-\xi)}\,d\xi = e^{bt}\cdot\int_0^t e^{(a-b)\xi}\,d\xi = |a\neq b| =$$

$$=\frac{e^{bt}}{a-b}\left[e^{(a-b)\xi}\Big|_0^t\right]=\frac{e^{bt}}{a-b}\left[e^{at-bt}-1\right]=\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}\implies$$

$$\boxed{\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}\longrightarrow\frac{1}{(p-a)(p-b)}}$$

תרגיל 5

מצא מקור רציף $f(t)$, כך ש

$$f(t)\longrightarrow\frac{1}{p^3(p^2+1)}$$

פתרון (על הערכה)

כיוון ש- $t^n\to\frac{n!}{p^{n+1}}$, $\sin t\longrightarrow\frac{1}{p^2+1}$ <= עבור $n=2$

לפי משפט בורל:

$$\frac{t^2*\sin t}{2!}\longrightarrow\frac{1}{p^3(p^2+1)}$$ <= נמצא את הקונבולוציה:

$$\frac{1}{2}t^2 * \sin t = \frac{1}{2}\int_0^t (\sin\xi)(t-\xi)^2 d\xi = \frac{1}{2}\int_0^t (\xi-t)^2 \sin\xi \, d\xi =$$

$$= \frac{(-1)}{2}\int_0^t (\xi-t)^2 d\cos\xi = -\frac{(\xi-t)^2\cos\xi}{2}\Big|_0^t + \int_0^t (\xi-t)\cos\xi \, d\xi =$$

$$= \frac{t^2}{2} + \underbrace{(\xi-t)\sin\xi\Big|_0^t}_{=0} - \int_0^t \sin\xi \, d\xi = \frac{t^2}{2} + \cos\xi\Big|_0^t =$$

$$= \boxed{\frac{t^2}{2} + \cos t - 1}$$

3. נוסחת דיואמל

משפט הבא שימושי עבור מציאת מקורות לפי התמונות ולפתרון משוואות דיפרנציאליות.

משפט 3.1 (ניסוח של המרצה)

אם ב $[0,\infty)$ מקור $f(t)$ רציף, ומקור $g(t)$ בעל נגזרת רציפה, אזי מתקיימת נוסחת דיואמל:

$$\frac{d}{dt}(f*g)(t) = g(0)f(t) + (f*g')(t) \to pF(p)G(p) \quad (3.1)$$

$$\text{כאשר} \quad (3.2) \qquad f(t)\to F(p), \quad g(t)\to G(p)$$

באופן דומה, אם המקור $f(t)$ בעל נגזרת רציפה ב-$[0,\infty)$, והמקור $g(t)$ רציף ב $[0,\infty)$, אזי מתקיימת נוסחת דיואמל:

$$\frac{d}{dt}(f*g)(t) = f(0)g(t) + (f'*g)(t) \to pF(p)G(p) \quad (3.3)$$

הוכחה

נבדוק (3.1). כיוון ש- $g(t)\to G(p)$, אזי $g'(t)\to pG(p)-g(0) \Longrightarrow$

$$(f*g')(t) \longrightarrow \left|\begin{matrix}\text{משפט}\\ \text{בורל}\end{matrix}\right| \to F(p)[pG(p)-g(0)] = pF(p)G(p) - g(0)F(p)$$

כיוון ש- $g(0)f(t)\to g(0)F(p)$, אזי נקבל בחיבור:

$$g(0)f(t) + (f*g')(t) \to pF(p)G(p) - g(0)F(p) + g(0)F(p) = pF(p)G(p)$$

מה שצריך להוכיח. נשים לב ללא הוכחה:

$$\frac{d}{dt}(f*g)(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t f(\xi)g(t-\xi)d\xi = f(t)g(t-\xi)\Big|_{\xi=t} + \int_0^t f(\xi)g'(t-\xi)d\xi =$$

$$= g(0)f(t) + (f*g')(t)$$

$\Longrightarrow$ לפי משפט על דיפר' המקור ומשפט בורל:

$$\frac{d}{dt}(f*g)(t) \to pF(p)G(p) - (f*g)(t)\Big|_{t=0} = pF(p)G(p)$$

כ"א קיבלנו הוכחה שניה ל (3.1) .

נוסחא (3.3) מוכחת באופן דומה

∎

תרגיל 1

מצא מקור עבור התמונה F(p) אם,

$$F(p)=\frac{1}{p^3(p^2+1)}$$

פתרון (של המרצה)

כבר פתרנו את הבעיה הנ"ל. כעת נפתור אותה בעזרת נוסחת דיואמל

$$F(p)=\frac{1}{p^3(p^2+1)}=p\,\frac{1}{p^2+1}\,\frac{1}{p^4}$$

כיוון ש- $\frac{1}{3!}t^3\to\frac{1}{p^4}$, $\sin t\to\frac{1}{p^2+1}$, אזי לפי נוסחת דיואמל

נקבל: $\frac{d}{dt}\frac{1}{3!}(t^3*\sin t)\longrightarrow p\cdot\frac{1}{p^4}\,\frac{1}{p^2+1}=\frac{1}{p^3(p^2+1)}$ $\Longleftarrow$

נשאר לחשב נגזרת של הקונבולוציה:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{1}{3!}\int_0^t(\sin\xi)(t-\xi)^3d\xi=\frac{1}{3!}(\sin\xi)(t-\xi)^3\Big|_{\xi=t}+$$

$$+\frac{1}{3!}\int_0^t(\sin\xi)\,3(t-\xi)^2\,d\xi=\frac{1}{2!}\int_0^t(\sin\xi)(t-\xi)^2d\xi=\left|\text{עמ' } 11\right|=$$

$$=\frac{t^2}{2}+\cos t-1$$

האינטגרל הנ"ל חושב בעמ' 11.

∎

תרגיל 2:

מצא את המקור עבור התמונה F(p) במקרה:

$$F(p)=\frac{p}{(p-1)(p-2)}$$

פתרון: (של המרצה)

$F(p)=p\,\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{p-2}$ $\Longleftarrow$ כיוון ש- $e^{2t}\to\frac{1}{p-2}$, $e^t\to\frac{1}{p-1}$ אזי

לפי נוסחת דיואמל נקבל:

$$\frac{d}{dt}\int_0^t e^{2\xi}\cdot e^{t-\xi}d\xi=\frac{d}{dt}(e^t*e^{2t})\longrightarrow\frac{p}{(p-1)(p-2)}\quad\Longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^t e^{2\xi}e^{t-\xi}d\xi=\frac{d}{dt}\int_0^t e^{t+\xi}d\xi=\frac{d}{dt}\,e^{t+\xi}\Big|_0^t=\frac{d}{dt}(e^{2t}-e^t)=2e^{2t}-e^t$$

∎

הערה

בתרגיל הנ"ל לא ניתן להשתמש במשפט בורל באופן ישיר:

$$F(p)=\frac{p}{(p-1)(p-2)}=\frac{p}{p-1}\,\frac{1}{p-2}=\frac{1}{p-1}\cdot\frac{p}{p-2}$$

כיוון שהפונקציות $\frac{p}{p-1}$, $\frac{p}{p-2}$ - אינן תמונות. כדי ש-$F(p)$ יהיה
תמונה , חייבים

$$\lim_{Re\,p\to\infty}F(p)=0$$

ואפילו (למשל):

$$\lim_{Re\,p\to\infty}\frac{p}{p-1}=\lim_{Re\,p\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=1$$

$$\lim_{Re\,p\to\infty}\frac{p}{p-2}=\lim_{Re\,p\to\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{p}}=1$$

אבל ניתן להגיע למשפט בורל:

$$F(p)=\frac{p}{(p-1)(p-2)}=\frac{p-1+1}{(p-1)(p-2)}=\frac{1}{p-2}+\frac{1}{(p-1)(p-2)}\Rightarrow$$

$$e^{2t}\to\frac{1}{p-2}\;,\qquad\int_0^t e^{\tau}\cdot e^{2(t-\tau)}d\tau=(e^t*e^{2t})\to\frac{1}{(p-1)(p-2)}\Rightarrow$$

$$\int_0^t e^{\tau}\cdot e^{2t-2\tau}d\tau=\int_0^t e^{2t-\tau}d\tau=-e^{2t-\tau}\Big|_0^t=-e^t+e^{2t}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{1}{p-2}+\frac{1}{(p-1)(p-2)}\longleftarrow e^{2t}-e^t+e^{2t}=\boxed{2e^{2t}-e^t}$$

תרגיל 3

מצא מקור עבור התמונה

$$F(p)=\frac{p^3}{(p^2+1)(p^2+4)}$$

פתרון

כיוון ש- $F(p)=p\cdot\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+4}$ וחוק מכפ.,

$$\left.\begin{aligned}\cos t&\to\frac{p}{p^2+1}\\ \cos 2t&\to\frac{p}{p^2+4}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{d}{dt}\big((\cos 2t)*(\cos t)\big)\to p\,\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+4}\Rightarrow$$

נותר לחשב את הקונבולוציה ולגזור:

$$\cos 2t * \cos t = \int_0^t \cos 2\xi \cdot \cos(t-\xi)\,d\xi = \int_0^t \frac{\cos(2\xi-t+\xi)+\cos(2\xi+t-\xi)}{2}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \left[\cos(3\xi-t)+\cos(\xi+t)\right]d\xi = \left[\frac{\sin(3\xi-t)}{6}+\frac{\sin(\xi+t)}{2}\right]\Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{\sin 2t}{6}+\frac{\sin 2t}{2}+\frac{\sin t}{6}-\frac{\sin t}{2} = \frac{2}{3}\sin 2t - \frac{\sin t}{3} \implies$$

$$\frac{d}{dt}\left[(\cos 2t)*(\cos t)\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3}\sin 2t - \frac{\sin t}{3}\right) = \boxed{\frac{4}{3}\cos 2t - \frac{\cos t}{3}}$$

4. פונקציית גמא של אוילר, תכונותיה ושימושיה

קיבלנו לעיל את ההתאמה הבאה:

$$t^n \longrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad n=0,1,2,\dots \qquad (4.1)$$

מטרתנו, לקבל את התמונה עבור t^α, α - כל מספר חיובי.

המקרה $\alpha<0$ אינו מעניין כיוון ש-t^α עבור $\alpha<0$ אינו מקור

(הפונק' אי רציפות מסוג 2 בנקודה $t=0$)

לצורך כך נגדיר פונקציית גמא של אוילר:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt, \quad x>0 \qquad (4.2)$$

<u>למה 4.1</u>

אינטגרל (4.2) מתכנס עבור $x>0$ (ז"א פונק' גמא מוגדרת עבור $x>0$)

<u>הוכחה</u>

נתון (לאינטגרל (4.2) נק' מיוחדות באפס וב-∞):

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = I_1(x)+I_2(x)$$

(1) <u>התנהגות באפס ($I_1(x)$)</u>

כיוון ש- $0<e^{-t}t^{x-1}\le t^{x-1}$ עבור $t>0$, אזי עבור $x>0$ נקבל:

$$0<I_1(x) = \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt \le \int_0^1 t^{x-1}\,dt = \frac{t^x}{x}\Big|_0^1 = \frac{1}{x}<\infty$$

לכן, $I_1(x)$ מתכנס עבור $x>0$.

(2) <u>התנהגות ב-∞ ($I_2(x)$)</u>

אינטגרל $I_2(x)$ מתכנס לכל x. ובאמת, נתבונן בפונקציה:

$$\varphi(t) = t^{x+1}e^{-t}, \quad t\ge 1, \quad x>0 \implies$$

$$\varphi'(t) = (x+1)t^x e^{-t} - t^{x+1}e^{-t} = t^x e^{-t}[x+1-t], \quad t\ge 1$$

מכאן נובע:

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi'(t)>0\,, & 1\le t\le x+1 \\ \varphi'(x+1)=0\,, & t=x+1 \\ \varphi'(t)<0\,, & t>x+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \max_{t\ge 1}\varphi(t)=\varphi(x+1)=(x+1)^{x+1}e^{-x-1}= \\ = c(x)<\infty$$

לכן,

$$\varphi(t)=t^{x+1}e^{-t}=t^2\left[t^{x-1}e^{-t}\right]\le c(x)\Rightarrow 0<t^{x-1}e^{-t}\le\frac{c(x)}{t^2}$$

$$\Rightarrow I_2(x)=\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt\le c(x)\int_1^\infty\frac{dt}{t^2}=c(x)<\infty$$

לכן, אינטגרל $\Gamma(x)$ מתכנס לכל $x>0$, מ"ש תחום ההגדרה של $\Gamma(x)$: $x>0$

▨

למה 4.2

(1) $\Gamma(x)>0$ עבור $x>0$ (לפונק' $\Gamma(x)$ אין אפסים)

(2) לכל $x>0$ מתקיימת הנוסחה

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\,,\quad\forall x>0 \tag{4.3}$$

הוכחה

(1) ברור. כעת, אם $x>0$ אזי:

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty t^xe^{-t}dt=-\int_0^\infty t^x de^{-t}=\underbrace{-t^xe^{-t}\Big|_0^\infty}_{=0\,,\ x>0}+x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt=x\Gamma(x)$$

▨

מסקנה 4.2.1

מתקיים השוויון:

$$\Gamma(n+1)=n! \tag{4.4}$$

הוכחה ידוע:

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\Big|_{x=1}=\int_0^\infty e^{-t}dt=1 \implies \text{(ראה (4.3)):}$$

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot\underbrace{\Gamma(1)}_{=1}=n!$$

▨

למה 4.3

מתקיימים השוויונות:

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\implies\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4},\ \Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right)=\frac{15\sqrt{\pi}}{8},\ldots \tag{4.5}$$

לשאר $(x\neq 1,\ x\neq n,\ x\neq n+\frac{1}{2})$ $x\in\mathbb{R}_+=(0,\infty)$, פונק' $\Gamma(x)$
ניתנת לחישוב מקורב, בשיטות מספריות.
(למה? ניתנת להצגה כאינט' אוילר $B(x,y)$
מסוג 2 (ר' בהמשך), אחה"כ משפט צ'בישב על
אינטגרציה של דיפרנציאל בינומיאלי)

<u>משפט 4.3</u>

לכל $\alpha>0$ מתקיימת ההתאמה:

(4.6) $\quad t^{\alpha}\to\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}},\quad \mathrm{Re}\,p>\varepsilon>0$, לכל ε מ- $(0,\infty)$

<u>הוכחה</u>

לפי ההגדרה

(4.7) $$t^{\alpha}\to\int_0^{\infty}t^{\alpha}e^{-pt}\,dt$$

נחשב אינטגרל (4.7) בתנאי ש- p מס' ממשי חיובי. ניתן להוכיח, שהנוסחא המתקבלת נכונה לכל p מרוכב, כך ש- $\mathrm{Re}\,p\geq\varepsilon>0$, ε - כל מספר חיובי.

נקבל:

$$\int_0^{\infty}t^{\alpha}e^{-pt}\,dt=\left|\begin{array}{ll} s=pt\ \Rightarrow\ t=0\to s=0, & t=\infty\to s=\infty\\ t^{\alpha}=\dfrac{s^{\alpha}}{p^{\alpha}}\ , & dt=\dfrac{ds}{p}\end{array}\right|$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{s^{\alpha}}{p^{\alpha}}e^{-s}\frac{ds}{p}=\frac{1}{p^{\alpha+1}}\underbrace{\int_0^{\infty}s^{(\alpha+1)-1}e^{-s}\,ds}_{\Gamma(\alpha+1)}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}\Rightarrow(4.6)$$

▨

<u>מסקנה 4.3.1</u>

(4.7) אם $n\in\{0,1,2,\ldots\}$ $\Leftarrow$ $\boxed{t^{n}\to\dfrac{n!}{p^{n+1}}}$

הערה 4.4

אם $\alpha\in(-1,0)$, אזי הפונק' t^{α} אינה מקור (נק' אי רציפות מסוג 2 בנק' $t=0$). אך הצד הימני של הנוסחא

(4.8) $$t^{\alpha}\to\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$$

הגיונית גם עבור $\alpha\in(-1,0)$, כיוון ש- $\alpha+1\in(0,1)$.
לכן הפונק' t^{α} עבור $\alpha\in(-1,0)$ נחשבת מקור "מיוחד".

ואת "התמונה" מוצאים לפי נוסחא (4.8).

<u>תרגיל 1</u>

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \to \left|\alpha=-\frac{1}{2}\right| \to \left|(4.8)\right| \to \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{p^{-\frac{1}{2}+1}} = \left|\Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}\right| =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \to \frac{1}{\sqrt{p}}}$$

ניתן להוכיח, ניתן להפעיל על המקורות המיוחדים הנ"ל את כל התכונות הרגילות של החישובים. למשל, לפי משפט ההזזה $e^{p_0 t} f(t) \to F(p-p_0)$ נקבל:

$$\boxed{\frac{e^{at}}{\sqrt{\pi t}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{p-a}}}$$

5. שימושים ותרגילים (פונק' $\Gamma(x)$)

(1) נוסחת 'ההשלמה' (אוילר)

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \qquad x \in (0,1) \qquad (5.1)$$

<u>תרגיל 1</u> מצא $\Gamma(\frac{1}{2})$

<u>פתרון:</u> נציב ב (5.1): $x=\frac{1}{2}$ <= $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$

אבל $\Gamma(x)>0$ עבור כל $x>0$ <=

$$\boxed{\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}}$$

////

<u>תרגיל 2:</u>

יהיו $\alpha>0$, $\beta>0$. מצא $t^{\alpha} * t^{\beta}$

<u>פתרון</u>

כיוון ש- t^{α}, t^{β} עבור $\alpha>0, \beta>0$ - מקורות, אזי $t^{\alpha} * t^{\beta}$ גם כן מקור. כיוון ש

$$\left\{\begin{array}{l} t^{\alpha} \to \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}} \\ t^{\beta} \to \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{p^{\beta+1}} \end{array}\right. \Longrightarrow$$ לפי משפט בורל:

$$t^{\alpha} * t^{\beta} \to \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{p^{\alpha+\beta+2}}$$

$$\Leftarrow \qquad \boxed{\frac{t^{\alpha} * t^{\beta}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \longrightarrow \frac{1}{p^{\alpha+\beta+2}}}$$

מצד שני :

$$t^{\alpha+\beta+1} \longrightarrow \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{p^{\alpha+\beta+2}} \qquad \Leftarrow$$

$$\boxed{\frac{t^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \longrightarrow \frac{1}{p^{\alpha+\beta+2}}}$$

כיוון ש $t^{\alpha} * t^{\beta}$ מקור רציף, ו- $t^{\alpha+\beta+1}$ מקור רציף,
אז לפי משפט היחידות (אם שני מקורות רציפים f ו- φ
בעלי אותה תמונה, אז $f \equiv \varphi$) נקבל:

$$\frac{t^{\alpha} * t^{\beta}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} = \frac{t^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \Rightarrow \boxed{t^{\alpha} * t^{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} t^{\alpha+\beta+1}}$$

$\blacksquare$

<u>תרגיל 3</u>

יהיו $\alpha>0$, $\beta>0$ ו- $B(\alpha,\beta)$ אינט' אוילר מסוג 2

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx \qquad (5.2)$$

הוכח נוסחת אוילר:

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \qquad \alpha>0,\ \beta>0$$

<u>הוכחה</u>

מתרגיל 2 קיבלנו:

$$t^{\alpha} * t^{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}, \quad \alpha>0,\ \beta>0 \quad .$$ אבל:

$$t^{\alpha} * t^{\beta} = \int_0^t s^{\alpha}(t-s)^{\beta}\,ds \Rightarrow \int_0^t s^{\alpha}(t-s)^{\beta}\,ds = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} t^{\alpha+\beta}$$

אבל:

$$\int_0^t s^{\alpha}(t-s)^{\beta}\,ds = \left| \begin{array}{l} s := tx \Rightarrow s=0 \to x=0,\ s=t \to x=1 \\ ds = t\,dx \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 (tx)^{\alpha}(t-tx)^{\beta}\,t\,dx = \underline{\underline{t}}^{\alpha+\beta+1} \cdot \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,dx = \underline{\underline{t}}^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

נצמצם ב $t \neq 0$, נקבל:

$$\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}, \quad \alpha>0,\ \beta>0 \qquad (5.3)$$

לכן,

$$\int_0^1 x^{(\alpha+1)-1}(1-x)^{(\beta+1)-1}dx = \boxed{B(\alpha+1,\beta+1) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}}\ , \ \alpha>0,\ \beta>0$$

כעת, נוכיח לבד ש-

$$B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha) \qquad (1)$$

ובאמת,

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \left| \begin{matrix} x := 1-t \\ t = 1-x \end{matrix} \right| = \int_1^0 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1}(-1)dt =$$

$$= \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt = B(\beta,\alpha)$$

(2)

$$\left.\begin{matrix} B(\alpha,\beta) = \frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta-1) \text{ , אם } \beta>1 \\ B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha-1,\beta) \text{ , אם } \alpha>1 \end{matrix}\right\} \qquad (5.4)$$

<u>הוכחה</u>

שתי הנוסחאות (5.4) נבדקות בצורה זהה. למשל,

עבור $\beta>1$ נמצא:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 (1-x)^{\beta-1} d\frac{x^\alpha}{\alpha} = \underbrace{\frac{x^\alpha(1-x)^{\beta-1}}{\alpha}\Big|_0^1}_{=0,\ \text{כי } \beta-1>0} +$$

$$+ \frac{\beta-1}{\alpha}\int_0^1 x^\alpha(1-x)^{\beta-2}dx = \left| x^\alpha \equiv x^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}(1-x) \right|$$

$$= \frac{\beta-1}{\alpha}\int_0^1 [x^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}(1-x)](1-x)^{\beta-2}dx =$$

$$= \frac{\beta-1}{\alpha}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-2}dx - \frac{\beta-1}{\alpha}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx =$$

$$= \frac{\beta-1}{\alpha}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-2}dx - \frac{\beta-1}{\alpha}B(\alpha,\beta) =$$

$$= \frac{\beta-1}{\alpha}B(\alpha,\beta-1) - \frac{\beta-1}{\alpha}B(\alpha,\beta) \implies$$

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\beta-1}{\alpha}B(\alpha,\beta-1) - \frac{\beta-1}{\alpha}B(\alpha,\beta) \implies$$

$$\frac{(\alpha+\beta-1)\,B(\alpha,\beta)}{\alpha} = \frac{\beta-1}{\alpha}\,B(\alpha,\beta-1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B(\alpha,\beta) = \frac{\beta-1}{(\beta+\alpha-1)}\,B(\alpha,\beta-1)}$$

כעת :

$$B(\alpha+1,\beta+1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta+1}\,B(\alpha+1,\beta) = \frac{\beta\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}\,B(\alpha,\beta)$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+1,\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \left|\,\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)\,\right| = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}\,\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

כיוון ש-

$$\Leftarrow \quad B(\alpha+1,\beta+1) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

$$\Leftarrow \quad \frac{\beta\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}\,B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}\,\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$\boxed{B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}}$$

∎