תרגול 7 – טורים

<u>הגדרה</u>

בהינתן טור $\sum a_n$ נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ על ידי:
$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

נאמר שהטור $\sum a_n$ מתכנס אם קיים גבול סופי $S \in \mathbb{R}$ לסדרת הסכומים החלקיים שלו. במקרה זה S נקרא "סכום הטור $\sum a_n$" ונכתוב $S = \sum a_n$. אם $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת במובן הצר, נאמר שהטור מתבדר.

<u>דוגמא</u>

נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ונרצה לבדוק אם הוא מתכנס. נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים שלו: $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$. כעת,
$\lim S_n = \lim\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

<u>הערה</u>: באופן כללי הטור הגיאומטרי $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ מתכנס אמ"מ $|q| < 1$.

<u>משפט</u> (תנאי הכרחי להתכנסות טור)

אם טור $\sum a_n$ מתכנס אזי $\lim a_n = 0$.

- שימו לב שזהו תנאי הכרחי אך לא מספיק. כלומר: אם $\lim a_n \neq 0$ הטור מתבדר; אם $\lim a_n = 0$ לא ניתן לקבוע.

<u>תרגיל</u>

בדקו את התכנסות הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

פתרון

א. האיבר הכללי מקיים $\lim a_n = \frac{1}{2}$ ולכן הטור מתבדר.

ב. האיבר הכללי מקיים $\lim \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$ ולכן כרגע לא ניתן לקבוע דבר.

נמשיך לחקור. נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים של הטור:

$$S_n = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ldots + \ln(n+1) - \ln n =$$
$$= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$$

מתקיים: $\lim S_n = \lim \ln(n+1) = \infty$ ולכן הטור מתבדר.

מש"ל

הגדרה: ערך שלם

עבור $x \in \mathbb{R}$ הערך השלם $[x]$ הוא המספר השלם הגדול ביותר שקטן או שווה ל- x. למשל: $[7.2]=7,\ [-2.8]=-3$. מתקיים: $[x] \le x < [x]+1$.

תרגיל

הוכיחו שהטור הבא מתכנס: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

פתרון

נתבונן בתתי סדרות של סדרת הסכומים החלקיים:

$$S_{2N} = \sum_{n=2}^{2N} \frac{(-1)^n}{\left[\frac{n}{2}\right]} = \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ is even}}}^{2N} \frac{(-1)^n}{\left[\frac{n}{2}\right]} + \sum_{\substack{n=3 \\ n \text{ is odd}}}^{2N-1} \frac{(-1)^n}{\left[\frac{n}{2}\right]} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{2k}}{\left[\frac{2k}{2}\right]} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(-1)^{2k+1}}{\left[\frac{2k+1}{2}\right]} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{-1}{k} = \frac{1}{N}$$

$$S_{2N+1} = S_{2N} + a_{2N+1} = S_{2N} - \frac{1}{N} = 0.$$

כלומר, שתי תתי הסדרות של S_n מתכנסות לאפס ולכן $S_n \to 0$. לסיכום הטור מתכנס וסכומו אפס.

מש"ל

תרגיל

מצאו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

פתרון

מתקיים $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)^2=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{2}{n(n+1)}$ (פירוק לשברים חלקיים). כעת,

$$a_n=\frac{2n+1}{n^2}+\frac{2n+1}{(n+1)^2}-\frac{4n+2}{n(n+1)}=\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{2(n+1)-1}{(n+1)^2}-(4n+2)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=-\frac{4n}{n}+\frac{4n+4}{n+1}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$$

נמצא את האיבר הכללי של סדרת הסכומים החלקיים:

$S_N=\frac{1}{1}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-...+\frac{1}{N^2}-\frac{1}{(N+1)^2}=1-\frac{1}{(N+1)^2}$ ולכן הטור מתכנס וסכומו 1.

מש"ל

<u>מבחני השוואה עבור טורים חיוביים</u>

<u>מבחן השוואה ראשון</u>

יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ שני טורים חיוביים ונניח שקיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $a_n\le b_n$.

א. אם $\sum b_n$ מתכנס אזי גם $\sum a_n$ מתכנס.
ב. אם $\sum a_n$ מתבדר אזי גם $\sum b_n$ מתבדר.

<u>דוגמא</u>

נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$. מתקיים החל מ-$n=4$:

$\frac{n!}{n^n}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n}{n^n}<\frac{1\cdot2\cdot n\cdot n\cdot...\cdot n}{n^n}=\frac{2n^{n-2}}{n^n}=\frac{2}{n^2}$. הטור $\sum\frac{2}{n^2}$ מתכנס (ראיתם בהרצאה ש-$\sum\frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס אמ"מ $\alpha>1$) ולכן לפי מבחן ההשוואה הטור המקורי מתכנס.

<u>מבחן ההשוואה השני</u>

יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ שני טורים חיוביים ונניח ש- $\lim\frac{a_n}{b_n}=L$.

א. אם $0<L<\infty$ אזי שני הטורים מתכנסים ומתבדרים יחד.

ב. אם $L=0$ אזי מהתכנסות $\sum b_n$ נובעת התכנסות $\sum a_n$.

ג. אם $L=\infty$ אזי מהתכנסות $\sum a_n$ נובעת התכנסות $\sum b_n$.

<u>דוגמאות</u>

א. נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$. נשווה אותו הטור $\sum\frac{1}{n}$ ונקבל:

$\lim\frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$. לכן הטור הנבדק מתבדר.

ב. נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[7]{n^{14}+20n+1}}{(1+2n)^5}$ ונשווה אותו עם הטור $\sum\frac{1}{n^3}$ (להסביר את האינטואיציה שמאחורי הבחירה של הטור המושווה). נקבל:

$\lim\frac{\frac{\sqrt[7]{n^{14}+20n+1}}{(1+2n)^5}}{\frac{1}{n^3}}=\frac{1}{32}$ ולכן הטור הנבדק מתכנס.

<u>מבחני השוואה Cauchy & d'Alembert</u>

<u>ד'אלמבר</u> (לברר אם דנבר מסכים לניסוח של גבולות עליונים)

יהי $\sum a_n$ טור חיובי.

א. אם $\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ הטור מתכנס.

ב. אם $\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ הטור מתבדר.

<u>קושי</u>

יהי $\sum a_n$ טור חיובי, ונניח ש- $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}=L$.

א. אם $L<1$ הטור מתכנס.

ב. אם $L>1$ הטור מתבדר.

ג. אם $L=1$ אי אפשר להכריע.

<u>דוגמאות</u>

א. נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln 3)^n}$. לפי מבחן קושי

$\sqrt[n]{\frac{n^3}{(\ln 3)^n}}=\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\ln 3}\to\frac{1}{\ln 3}<1$ ולכן הטור מתכנס.

ב. נבדוק את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)2^n}{n!}$. לפי מבחן המנה

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)2^n}{n!}}=\frac{2(n+2)}{(n+1)^2}\to 0$ ולכן הטור מתכנס.

__מבחן העיבוי__

תהי $\{a_n\}$ סדרה חיובית, מונוטונית יורדת. אזי הטור $\sum a_n$ מתכנס אמ"מ הטור $\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס.

__דוגמא__

נבחן את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. כיוון שהסדרה $\frac{1}{n\ln^2 n}$ מקיימת את תנאי מבחן העיבוי, הטור הנתון יתכנס אמ"מ הטור $\sum\frac{2^n}{2^n\ln^2\left(2^n\right)}$ יתכנס. מתקיים

$\sum\frac{1}{n^2\ln^2 2}=\sum\frac{1}{\ln^2\left(2^n\right)}=\sum\frac{2^n}{2^n\ln^2\left(2^n\right)}$ והטור $\sum\frac{1}{n^2\ln^2 2}$ מתכנס.

__קריטריון קושי להתכנסות טורים__

הטור $\sum a_n$ מתכנס אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_0$ ולכן $p\in\mathbb{N}$ מתקיים $|S_{n+p}-S_n|=|a_{n+1}+...+a_{n+p}|<\varepsilon$.

__תרגיל__

בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\left[\sqrt{n}\right]}}{\sqrt{n}}$.

__פתרון__

מוטיבציה: $\left[\sqrt{(k+1)^2}\right]=k+1$, $\left[\sqrt{k^2}\right]=k$ ולכן לכל $k^2\le n\le (k+1)^2-1$ מתקיים $\left[\sqrt{n}\right]=k$. נראה שהטור לא מתכנס על ידי כך שנראה שאינו מקיים את קריטריון קושי.

$$|S_{(k+1)^2-1}-S_{k^2}|=|S_{k^2+2k}-S_{k^2}|=|a_{k^2+1}+a_{k^2+1}+\ldots+a_{k^2+2k}|=$$

$$=\left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{k^2+1}}+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k^2+2}}+\ldots+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k^2+2k}}\right|=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{k^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k^2+2k}}\ge$$

$$\ge\frac{2k}{\sqrt{k^2+2k}}\ge 1$$

מש"ל