תרגיל 8

להגשה עד 8.1.18

שאלה 1

יהי $(\mathbb{R}^2, \mathbf{B}(\mathbb{R}^2))$ המרחב המדיד של המישור עם σ אלגברה בורל. נגדיר את הפונקציה

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & 0 \le x \text{ and } x \le y < x+1 \\ -1 & 0 \le x \text{ and } x+1 \le y < x+2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

הראו כי: $\int\int f(x,y)dm(x)dm(y) \neq \int\int f(x,y)dm(y)dm(x)$. מדוע אין זו סתירה למשפט פוביני?

שאלה 2

הוכיחו כי: $I := \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dm(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

<u>הדרכה:</u> חשבו קודם את I^2 ע"י מעבר לקואורדינטות פולריות.

שאלה 3

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מדידה לבג. הוכיחו את השוויון:
$\int_{-\infty}^\infty |f(x)| dm(x) = \int_0^\infty m(\{x : |f(x)| \ge t\}) dm(t)$.

שאלה 4

תהי μ מידה סופית על $\mathbb{R}$. נגדיר $\alpha(x) := \mu((-\infty, x])$.
הוכיחו כי: $\int_{\mathbb{R}} [\alpha(x+c) - \alpha(x)] dm(x) = c\mu(\mathbb{R})$.

שאלה 5

יהי: $\mathrm{T} := \left\{ \mathrm{e^{it}} \in \mathbb{C} : \mathrm{t} \in [0, 2\pi) \right\}$, ותהי $\mu := \frac{m}{2\pi}$ מידת לבג המנורמלת על T.
נתונות: פונקציה f ממשית מדידה על T וקבוצה $A \subseteq \mathrm{T}$ מדידה, כך ש: $\int_{\mathrm{T}} f d\mu = a$ וכן: $\mu(A) = b$.
הראו כי קיים סיבוב של הקבוצה A בזווית θ, שנסמנו ב A_θ, כך ש- $\int_{A_\theta} f d\mu \ge ab$.
<u>הערה:</u> סיבוב בזווית θ הוא: $A_\theta = e^{i\theta} A$.

תהנו ☺