מבוא לטופולוגיה – תרגיל 4

שאלה 1

הגדרה. יהיו X,Y מרחבים מטריים. פונקציה $f\colon X\to Y$ נקראת *רציפה במידה שווה* אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_1,x_2\in X$ מתקיים:

$$d_X(x_1,x_2)<\delta\Rightarrow d_Y(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$$

יהיו X,Y מרחבים מטריים. להוכיח:

א') פונקציה $f\colon X\to Y$ רציפה במידה שווה היא רציפה.

ב') אם X קומפקטי אז פונקציה $f\colon X\to Y$ רציפה היא רציפה במידה שווה.

(רמז: ולהשתמש במוסג "מספר לבג של כיסוי")

שאלה 2

תהי X קבוצה ו-τ קבוצה של תת-קבוצות של X. במקרים א) - ד) (כאן למטא):

1) תוכיחו או תפריכו ש-τ – טופולוגיה על X.
2) במידה ו-τ – טופולוגיה תמצאו את כל התת-קבוצות הסגורות
3) במידה ו-τ – טופולוגיה תוכיחו או תפריכו שהמרחב הטופולוגי (X,τ) מטריזבילי.

א) $X=\{a,b\}$ $\tau=\{\emptyset,X,\{a\}\}$

ב) $X=\{a,b,c\}$ $\tau=\{\emptyset,X,\{a,c\},\{b,c\},\{c\}\}$

ג) $X=\{a,b,c\}$ $\tau=\{\emptyset,X,\{a,c\},\{b,c\},\{a,b\}\}$

ד) תהי X קבוצה המכילה יותר מ-2 איברים.
יהיו: $p\in X$, $Y=X-\{p\}$, σ – טופולוגיה כלשהי על הקבוצה Y.
תהי $\tau=\{\emptyset\}\cup\{U\cup\{p\}\mid U\in\sigma\}$

שאלה 3 (מההרצאה האחרונה)

יהי X מרחב טופולוגי. יהיו A,B תת-מרכבים של X כך ש- $A\subseteq B\subseteq X$. להוכיח שלהשרות טופולוגיה ישירות מ-X ל-A או קודם להשרות טופולוגיה מ-X ל-B ולאחר מכן מ-B ל-A - זה אותו דבר.

<u>שאלה 4 </u>(מההרצאה האחרונה)

יהיו X,Y מרחבים <u>טופולוגיים</u> ו- f פונקציה: $f: X \to Y$.

להוכיח: f פונקציה רציפה אם ורק אם היא רציפה בכל נקודה $p \in X$.

<u>שאלה 5</u>

תהי $\mathbb{N}$ קבוצת מספרים טבעיים .

תהי $\tau = \{[n,\infty) \subseteq \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$

א) תוכיחו ש-τ טופולוגיה על $\mathbb{N}$
ב) יהי K מרחב טופולוגי סופי ותהי $f: K \to \mathbb{N}$ פונקציה.
תוכיחו או תפריכו ש-f פונקציה פתוחה.