פתרונות לתרגיל בית מספר 5

שאלה 5.1

א. הווקטורים הם בלתי תלויים (בדיקה קלה!)

ב. כאן הם כן תלויים היות ומעל $\mathbb{Z}_3$ מתקיים $(2,1,1)=2(1,2,2)$.

שאלה 5.4 (לא היה בתרגיל)

השאלה היא האם קיים צירוף $\alpha_1\begin{pmatrix}16 & 10 & 9\\ 3 & 8 & -11\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}6 & 5 & 4\\ 1 & 3 & -4\end{pmatrix}=0$ שאינו טריוויאלי.

ניתן לראות כי: $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 10 & 9\\ 3 & 8 & -11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}6 & 5 & 4\\ 1 & 3 & -4\end{pmatrix}$ לכן המטריצות תלויות ליניארית.

שאלה 6.4

א. לא נכון. דוגמא נגדית. $A=\{(1,0)\}, B=\{(1,0),(0,1)\}$. (הרי $A\cup B=B$)

ב. לא נכון. דוגמא נגדית: $A=\{(1,1)\}, B=\{(2,2)\}$.

שאלה 7.7 (לא היה בתרגיל)

א. נסמן ב- A את הבסיס ל- U ונסמן ב- B את הבסיס ל- V.
נסמן: $n=\dim V$. נניח בשלילה כי $\dim U>\dim V$, משמע, יש בבסיס של U יותר מ- n איברים. מצד שני, בבסיס של V יש בדיוק n איברים, ולפי הגדרת הבסיס זוהי קבוצה בלתי תלויה מקסימלית במרחב זה. היות ו- $U\subseteq V$, הוא אינו יכול להכיל קבוצה בת"ל גדולה יותר. סתירה להנחה. $\Leftarrow$ $\dim(U)\le\dim(V)$.

ב. נתון $U\subseteq V$, ונניח $\dim U=\dim V=n$. נניח בשלילה ש $U\neq V$ לכן קיים $v\in V$ כך ש $v\notin U$. ניקח בסיס B ל U ונסמן $B=\{u_1,...,u_n\}$ (שימו לב לשימוש בהנחה שהמימדים שווים). $v\notin span(B)=U$ ולכן לפי סעיף d בשאלה 3 בתרגיל 3 מתקיים ש $\{u_1,...,u_n,v\}$ בת"ל, אבל אז זו קבוצה בת"ל המוכלת ב V עם $n+1$ איברים וזו סתירה מכיוון שהמימד של V הוא n (בקבוצה בת"ל יש לכל היותר איברים כגודל המימד).

ג. נסמן $U=span(B)$ אז, $U=V$ לפי סעיף ב', ומכיוון ש- B בת"ל, היא מהווה בסיס עבור U.

<u>שאלה 7.9 (לא היה בתרגיל)</u>

נשים את הוקטורים בשורות מטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3-R_1 \\ R_4-R_2 \\ R_2-5R_1 \\ R_5-6R_1}]{R_6-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -12 & -18 & -24 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -7 & -15 & -18 & -23 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{6}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -7 & -15 & -18 & -23 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_5+7R_2 \\ R_6-3R_2}]{R_4+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_5+R_4 \\ R_6+R_4}]{R_3+2R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_6+2R_5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_6-\frac{5}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן קיבלנו שמרחב השורות של המטריצה האחרונה הוא ממימד 5 ולכן מרחב השורות הוא כל $\mathbb{R}^5$ (בהתאם לשאלה 7.7 סעיף ב'). מכיוון שהמטריצה האחרונה שקולת שורה לראשונה, גם השורות של הראשונה פורשות את כל $\mathbb{R}^5$.

כעת אנו צריכים למצוא בסיס המוכל בקבוצה המקורית, כלומר לבחור 5 וקטורים שיהוו בסיס. אנחנו רואים שהשורה השישית תלוייה בקודמותיה (כי היא התאפסה מבלי שנחליף שורות) ולכן 5 הוקטורים הראשונים מהווים בסיס. (קל לראות שמבלי השורה השישית עדיין היינו מגיעים למטריצה מדורגת עם 5 שורות שונות מאפס.) כלומר ההבסיס המוכל הינו

$$\{(1,2,3,4,5),(5,4,3,2,1),(1,2,1,2,1),(5,3,2,4,6),(6,5,3,6,7)\}$$

שאלה 7.19

יהא k המספר הקטן ביותר שעבורו $A^k = 0$ (לכן $A^{k-1} \neq 0$). קיים v עבורו $A^{k-1}v \neq 0$ (למשל ניקח את $v = e_i$ כאשר $C_i(A) \neq 0$).

נתבונן בקבוצה $\{v, Av, A^2v, ..., A^{k-1}v\}$. נוכיח שהיא בת"ל:

נניח שקיים צירוף לינארי המתאפס $\alpha_1 v + \alpha_2 Av + ... + \alpha_k A^{k-1}v = 0$. נכפיל את שני האגפים ב A^{k-1} ומה שיישאר (לאחר שיתאפסו כמעט כל האיברים כיוון ש: $A^k = 0$) זה $\alpha_1 A^{k-1}v = 0$, ומהנתון $A^{k-1}v \neq 0$ מקבלים $\alpha_1 = 0$.

כעת נתבונן בצ"ל החדש: $\alpha_2 Av + ... + \alpha_k A^{k-1}v = 0$. נכפיל את כל הצירוף ב A^{k-2} ונקבל $\alpha_2 = 0$ וכן הלאה עד שנאפס את כל המקדמים.
לכן הצירוף הלינארי היחיד שמתאפס הוא הטריוויאלי, ולכן הקבוצה אכן בת"ל כפי שרצינו.
כעת, כיוון שקבוצה זו פורשת תת מרחב של F^n (כי כל איבר בה הוא וקטור מאורך n), לא יתכן שבקבוצה יש יותר מ-n איברים, כלומר: $k-1 \leq n-1 \Leftarrow$

$k \leq n$ ולכן $A^n = 0$.

שאלה 7.20

V מ"ו מעל F ממימד n. נבנה בסיס ל-V: $\{v_1, ..., v_n\}$. כל וקטור ב-V ניתן להצגה:

$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, כאשר $\alpha_i \in F$. F הוא מ"ו מעל H ממימד m. נבנה בסיס ל F: $\{u_1, ..., u_m\}$. כל וקטור ב-F ניתן להצגה: $\alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} u_j$. לכן $v = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} u_j\right) v_i \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} u_j v_i\right)$ כאשר $\beta_{ij} \in H$.

$u_j v_i \in V$ מתוך תכונת כפל בסקלר. נוכיח ש $\left\{u_j v_i \,|\, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\right\} \subseteq V$ מהווה בסיס מעל H. הראנו שהקבוצה פורשת, נוכיח שהיא בת"ל. נניח $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} u_j v_i\right) = 0$ זה שווה ל $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} u_j\right) v_i = 0$ ולכן בגלל ש $\{v_1, ..., v_n\}$ בת"ל מעל F נקבל $\forall i: \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} u_j = 0$. מכיוון ש $\{u_1, ..., u_m\}$ בת"ל מעל H נקבל $\forall i, j: \beta_{ij} = 0$ ולכן הצירוף הלינארי היחיד שמתאפס הוא הטריוויאלי.

ניתן לראות שבבסיס יש $m \times n$ איברים כלומר המימד של V כמ"ו מעל H הוא mn.

דוגמא טובה לכך היא לקחת $V = \mathbb{C}^2, F = \mathbb{C}, H = \mathbb{R}$. הרי $\mathbb{C} = span\{1, i\}$ מעל $\mathbb{R}$, $V = span\{(1,0), (0,1)\}$ מעל $\mathbb{C}$ ו- $V = span\{(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)\}$ מעל $\mathbb{R}$.

שאלה 7.21

א. נוכיח לפי הקריטריון המקוצר: כיוון ש- $V \subseteq F^{n\times n}$, ו- V^t אלו המטריצות המשוחלפות למטריצות, אזי $V^t \subseteq F^{n\times n}$.

עבור $A^t, B^t \in V^t$, $\alpha \in F$: $\Leftarrow$ $A^t + \alpha B^t = \left(A+\alpha B\right)^t, A+\alpha B \in V$

ולכן $A^t + \alpha B^t \in V^t$ ת"מ.

ב. D בסיס של V. יש להוכיח כי $D^t := \{A^t : A \in D^t\}$ הוא בסיס ל- V^t.

עבור כל $A \in V$: $\Leftarrow$ $A = \sum \alpha_i d_i, d_i \in D$; $A^t = \sum \alpha_i d_i^t$ אזי D^t פורשת את V^t.

נוכיח שהיא בת"ל: נניח בשלילה כי היא לא, אזי קיים צירוף $\sum \beta_i d_i^t = 0$ לא טריוויאלי $\Leftarrow$

נבצע transpose משני האגפים ונקבל שקיים צירוף $\sum \beta_i d_i = 0$ לא טריוויאלי בסתירה

לכך ש- D היא בת"ל, אזי D^t בת"ל ולכן בסיס.

ג. לפי סעיף ב': $\left|D\right| = \left|D^t\right| \Rightarrow \dim(V) = \dim(V^t)$.

שאלה 7.25

א. בדקתי

ב. ניקח צירוף לינארי כלשהו $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + ... + \alpha_n f_n(x)$ ונניח שהוא מתאפס, כלומר שווה לוקטור האפס. במקרה זה, וקטור האפס הינו פונקציה האפס (הפונקציה ששולחת כל ערך לאפס). לכן יוצא ש $\forall i: f_i(a_i) = 0$ אבל $\forall i: f_i(a_i) = \alpha_i$ ולכן הצירוף הלינארי הוא טריוויאלי והקבוצה הינה בת"ל

ג. מכיוון שהמימד של מרחב זה הינו n, קבוצה בת"ל של n פולינומים בתוכו הינה בסיס לפי משפט השלישי חינם.

ד. נסמן $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$. אזי $f = 6f_1 + 17f_2 + 34f_3$

ה. נציב, נפתור, נפשט את הפולינומים ונראה שהוא שווה לפולינום מהסעיף הקודם לאחר פישוט.

שאלה 8.2.5

א. לא בהכרח. דוגמא נגדית: ניקח $V, W \subseteq \mathbb{R}^{10}$ המקיימים:
$\dim(V) = 9, \dim(W) = 8, W \subset V$. אזי $\dim(V \cap W) = \dim W = 8 \neq 7$.

ב. לא בהכרח. מכיוון ששניהם תתי מרחבים של $\mathbb{R}^{10}$, אזי יכול להיות מצב, לפי הנתון, ש: $\dim(V \cap W) = 0 \neq 2$. (אם ניקח תתי מרחבים זרים, קל למצוא כאלה).

ג. לא בהכרח, כי צד שמאל אינו גורר את צד ימין. דוגמא נגדית:
ניקח $W, U \subseteq V = \mathbb{R}^5$; $\dim(U) = 3$; $W \subseteq U, \dim(W) = 2,$. אזי מתקיים כי:
$5 = \dim(V) = \dim(U) + \dim(W) = 3 + 2$ אבל ברור כי: $V \neq U \oplus W$.

ד. נכון. הוכחה: מכיוון ששניהם תתי מרחב של V בעל מימד 7, ובגלל ש: $\dim(V_1) = 5$, אזי $5 \leq \dim(V_1 + V_2) \leq 7$. וממשפט המימדים נובע כי: $2 \leq \dim(V_1 \cap V_2) \leq 4$. מש"ל.

<u>שאלה 8.4</u>

נתון כי $U_1 + U_2 = U_1 + U_3$. נפעיל את משפט המימדים על שני האגפים:

$\dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_3) - \dim(U_1 \cap U_3)$ ולכן

$\dim(U_1 \cap U_3) - \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_3) - \dim(U_2)$ ולכן

$\underline{\dim(U_1 \cap U_2) < \dim(U_1 \cap U_3)} \Rightarrow \dim(U_2) < \dim(U_3)$.