טור טיילור ופיתוח פונקציות אלמנטריות

25 במאי 2014

משפט תהא $f(x)$ גזירה $n+1$ פעמים אז מתקיימים פיתוחי טיילור (מסדר n) הבאים:

1. פיתוח עם שארית פיאנו

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),x\to x_0$$

כאשר $o((x-x_0)^n),x\to x_0$ פירושו שקיימת פונקציה $g(x)$ המקיימת $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{(x-x_0)^n}=0$

2. פיתוח עם שארית לגרנז'

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

כאשר c נקודה בין x ל - x_0 .

הערה: במקרה ש $x_0=0$ הפיתוח נקרא טור מקלורן והוא נראה:

1. פיתוח עם שארית פיאנו

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k+o((x)^n),x\to 0$$

2. פיתוח עם שארית לגרנז'

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x)^{n+1}$$

דוגמא־ נפתח את $f(x)=x+\sin(x)$ לטור טיילור עם שארית פיאנו מסדר 2 סביב $x_0=\pi$
פתרון: $f'(x)=1+\cos(x),f^{(2)}(x)=-\sin(x)$ ולכן

$$f(x)=f(\pi)+\frac{f'(\pi)}{1!}(x-\pi)+\frac{f^{(2)}(\pi)}{2!}(x-\pi)^2+o((x-x_0)^2),x\to\pi$$

$$f(x) = \pi + o((x-x_0)^2), x \to \pi$$

דוגמא: השתמש בפיתוח טיילור מסדר ראשון (קירוב לינארי) על מנת לחשב את $\sqrt[3]{1006}$ והערך את השגיאה.

פתרון נגדיר $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ונרצה להציב $x = 1006$ נפתח את $f(x)$ סביב $x_0 = 1000$
ולכן $f^{(1)}(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, f^{(2)}(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$

$$f(x) = f(1000) + f^{(1)}(1000)(x-1000) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-1000)^2$$

$$f(x) = 10 + \frac{1}{3\cdot 100}(x-1000) - \frac{1}{9}c^{-5/3}(x-1000)^2$$

כאשר c בין 1000ל-x . נציב $x = 1006$ ונקבל

$$\sqrt[3]{1006} \approx 10 + \frac{6}{300}$$

עם שגיאה לכל היותר

$$\frac{1}{9}1006^{-5/3}(6)^2| \le |-\frac{1}{9}c^{-5/3}(6)^2| \le \frac{1}{9}1000^{-5/3}(6)^2| = \frac{4}{10^5}$$

דוגמא: נפתח את $f(x) = e^x$ לטור מקלורן מסדר n:

פתרון $f^{(k)}(x) = e^x$ ולכן

$$f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$$

הערה: מתקיים $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ (הנימוק בהמשך)

משפט: אם לפונקציה יש פיתוח לטור טיילור אז הוא נקבע ביחידות. כלומר אם

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), x \to x_0$$

אז המקדמים נקבעים ביחידות והם שווים ל - $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$

דוגמא: מצא את $(e^{x^2})^{(m)}(0)$

פתרון: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ ולכן $e^{x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$ מיחידות הטור נקבל שזהו אכן טור טיילור של e^{x^2} ולכן $\frac{(e^{x^2})^{(m)}(0)}{m!}$ שווה למקדם ה m -י בטור.

ולכן עבור m אי זוגי נקבל כי $(e^{x^2})^{(m)}(0) = 0$ עבור $m = 2n$ זוגי נקבל כי (שימו לב שהמקדם של x^{2n} הוא $\frac{1}{n!}$)

$$\frac{(e^{x^2})^{(m)}(0)}{m!} = \frac{(e^{x^2})^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \frac{1}{n!}$$

ולכן

$$(e^{x^2})^{(2n)}(0) = \frac{(2n)!}{n!}$$

משפט אם $f(x)$ גזירה מכל סדר בקטע $[-r,r]$ ומתקיים שם כי $|f^{(k)}(x)| \leq M$ החל מ k מסוים אז $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ (הפונקציה שווה לפיתוח טיילור שלה)

דוגמא: $|\sin^{(k)}(x)| \leq 1$ ולכן $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$

דוגמא: $|\cos^{(k)}(x)| \leq 1$ ולכן $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

דוגמא $|(e^x)^{(k)}| \leq e^r$ ולכן $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ בקטע $[-r,r]$ מכיוון שזה נכון לכל r זה נכון לכל מספר ממשי.

הערה: שימו לב שבמקרים אלו רדיוס ההתכנסות $R = \infty$

דוגמא לשימוש לגבולות: חשב

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)\sin(x) - x}{\sin^3(x)}$$

פתרון:

$$\cos(x)\sin(x) - x = [1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)][\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)] - x, x \to 0$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{12} + o(x^3)[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{5!} + o(3)] - x$$

$$= -\frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{12} + o(x^3)[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{5!} + o(3)], x \to 0$$

ולכן

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)\sin(x) - x}{\sin^3(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin^3(x)} \cdot \frac{\cos(x)\sin(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)\sin(x) - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{12} + o(x^3)[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{5!} + o(3)]}{x^3} = -\frac{2}{3}$$

פיתוח פונקציות נוספות

דוגמא: נמצא פיתוח טיילור ל $\ln|1+x|$ עבור $|x|<1$:

ידוע כי $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ עבור $|x|<1$ נציב $x=-t$ ונקבל כי $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-t)^k = \frac{1}{1+t}$, כעת

$$\ln|1+x| = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

דוגמא: נמצא פיתוח טיילור ל $\arctan(x)|$ עבור $|x|<1$:

ידוע כי $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ עבור $|x|<1$ נציב $x=-t^2$ ונקבל כי $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-t)^{2k} = \frac{1}{1+t^2}$,
כעת

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-t^2)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

נשים לב כי הטור מתכנס גם עבור $|x|=1$.
מכיוון שגם הטור רציף וגם $\arctan(x)$ משמאל ב $x=1$ נקבל כי

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1}$$

וניתן למצוא ל π קירוב ככה.

תרגיל: הוכח כי e הוא מספר אי רציונאלי.

פתרון: בקטע $[0,1]$ניעזר בפיתוח טור טיילור של e^x ונקבל: נפתח $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = e^1$ ולכן

$$2 = 1+1 < e < 1 + \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^k = 3$$

כעת נניח בשלילה כי $e=\frac{m}{n}$ שבר רציונאלי
נפתח שוב את e^x עד סדר n ונקבל

$$\frac{m}{n} = e = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + R_n$$

כאשר $\frac{3}{(n+1)!} > \frac{e}{(n+1)!} \geq \frac{e^c}{(n+1)!} = R_n$ שארית לגרנז'
נכפיל את המשוואה ב $n!$ ונקבל

$$m(n-1)! = n! + n! + \frac{n!}{2} + \frac{n!}{6} + \cdots + \frac{n!}{n!} + n!R_n$$

כלומר $n!R_n \geq 1$ כי הוא מספר טבעי גדול מ־0 אבל

$$n!R_n < \frac{3}{n+1}$$

ולכן $n=1$ כלומר e טבעי ־ סתירה!