לינארית 1 (88112), סמסטר קיץ תשעד,מועד ב'-פתרון

חלק א

1. זהו משפט המימדים - הוכחתם בהרצאה.

2. יהא V מ"ו נוצר סופית ו $T,S:V\to V$ ה"ל המקיימות $T\circ S=0$.

   (א) הוכיחו/הפריכו: אם $T\neq 0$ אז S אינה הפיכה.
   פתרון: הוכחה: נניח כי $T\neq 0$ ונניח בשלילה ש S הפיכה. נרכיב את S^{-1} מימין בשיוויון $T\circ S=0$ ונקבל
   $$T=0$$
   בסתירה להנחה.

   (ב) הוכיחו/הפריכו: $\dim\ker S+\dim\ker T\geq\dim V$
   פתרון: הוכחה: מהנתון נסיק כי לכל v מתקיים $T(S(v))=0$ ולכן
   $$\mathrm{Im}S\subseteq\ker T$$
   ומכאן ש
   $$\dim\mathrm{Im}S\leq\dim\ker T$$
   נוסיף לשני הצדדים $\dim\ker S$
   $$\dim V=\dim\mathrm{Im}S+\dim\ker S\leq\dim\ker T+\dim\ker S$$
   כאשר השיויון באדום זה משפט הדרגה. קיבלנו מה שרצינו.

3. תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ המקיימת כי $(A+I)^2=0$.

   (א) הוכיחו: Aהפיכה.
   פתרון: מהנתון נקבל
   $$A^2+2A+I=(A+I)^2=0$$
   ולכן
   $$I=A(-A-2I)$$
   ולכן
   $$A^{-1}=(-A-2I)$$
   ובפרט A הפיכה.

   (ב) הביעו את $\mathrm{adj}A$ באמצעות A,I והסקלר $|A|$.
   פתרון: משפט מההרצאה אומר ש
   $$\mathrm{adj}A\cdot A=|A|\,I$$
   ולכן, במקרה ש A הפיכה (כמו אצלנו), נקבל ש
   $$A^{-1}=\frac{\mathrm{adj}A}{|A|}$$
   או
   $$\mathrm{adj}A=|A|\,A^{-1}$$
   ולכן, בהוספת החישוב מסעיף קודם,
   $$\mathrm{adj}A=|A|\,A^{-1}=|A|\cdot(-A-2I)$$

חלק ב

4. נסמן $V=\mathbb{R}^4$ ונגדיר

$$W=...$$
$$U=...$$

מצאו בסיסים ומימדים למרחבים $U\cap W, U+W$.
פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. נסתפק פה ש W מוצג ע"י span ו U ע"י משוואות. מכאן ניתן להמשיך את הפתרון עם אלגוריתמיקה ידועה ומוכרת.

5. הוכיחו/הפריכו:

(א) לכל שתי מטריצות $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מתקיים $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.
פתרון: הפרכה: עבור

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

מתקיים כי

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$$

אבל

$$A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$$

(ב) תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש A הפיכה. אזי $N(B)=N(BA)$.
פתרון: הפרכה:

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

אזי $B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ולכן $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in N(A)$ מצד שני

$$BA\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

ולכן $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\notin N(BA)$.

(ג) תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ המקיימת $A^2=0$. אזי $A+I$ הפיכה.
פתרון: הוכחה: לפי הנתון מתקיים

$$(A+I)(A-I)=A^2-I=-I$$

ולכן

$$(A+I)^{-1}=-(A-I)$$

ובפרט $A+I$ הפיכה.

(ד) יהא n אי זוגי ו $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ אנטי-סימטרית. אזי A אינה הפיכה.
פתרון: הוכחה: לפי הנתון מתקיים

$$A^t=-A$$

ולכן

$$|A|=\left|A^t\right|=|-A|=(-1)^n|A|$$

כאשר השיוונות באדום הם תכונות דטר'. כיוון ש n אי-זוגי, נקבל

$$|A|=(-1)^n|A|=-|A|$$

ולכן

$$2\,|A|=0$$

ולכן

$$|A|=0$$

ולכן A אינה הפיכה.

6. נתנים וקטורים

$$v_1=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix},\, w_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$v_2=\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix},\, w_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$v_3=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix},\, w_3=\begin{pmatrix}a\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

(א) מצאו לאילו ערכי a, קיימת $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המקיימת

$$Tv_1=w_1,\ \ Tv_2=w_2,\ \ Tv_3=w_3$$

פתרון: אם v_1,v_2,v_3 בסיס אז קיימת T יחידה לפי משפט ההגדרה. במקרים אחרים נבדוק.
בשביל ש v_1,v_2,v_3 יהיו בסיס מספיק להראות שהם בת"ל (לפי השלישי חינם). זה שקול לכך שהמטריצה

$$\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$$

הפיכה. ניתן לחשב ולגלות שהדטר שלה היא $(a+2)\,(a-1)^2$. לכן עבור $a\neq 1,2$ קיימת T יחידה.
עבור $a=1$ נקבל ש $v_1=v_2$ ולכן לא קיימת T כנ"ל כי $w_1\neq w_2$(וכמובן שאם היתה קיימת T כזאת $Tv_1=Tv_2$)
עבור $a=-2$ נקבל ש v_1,v_2,v_3ת"ל. נבדוק מה התלות ע"י שנשים אותם במטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן $v_3=-v_1-v_2$. כעת נגדיר T לפי משפט ההגדרה להיות היחידה המקיימת

$$Tv_1=w_1,\ Tv_2=w_2,\ T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(הוקטור $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ הוא השלמה של v_1,v_2 לבסיס של $\mathbb{R}^3$). ולכן

$$Tv_3=T\left(-v_1-v_2\right)=-Tv_1-Tv_2=-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}=w_3$$

ולכן גם מתקיים $Tv_3=w_3$.

(ב) עבור $a=0$ מצאו את T מהסעיף הקודם מפורשות.
פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. זה יישום מידי של משפט ההגדרה.אפשר לפתור את המערכות

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ולגלות למה שווה $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ואז

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + yT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + zT\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

(ג) מצאו את העתקה ההופכית להעתקה מסעיף קודם.
פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. זה יישום מידי של משפט ההגדרה כמו בסעיף קודם, כאשר אנחנו יודעים ש T^{-1} ניתנת להגדרה ע"י משפט ההגדרה, להיות ה"ל היחידה המקיימת

$$T^{-1}w_1 = v_1, \quad T^{-1}w_2 = v_2, \quad T^{-1}w_3 = v_3$$