מתמטיקה מד"ר תשפב מועד א

1. מצאו פתרון למד"ר $(x-1)\,y' = y$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=1$.

פתרון: נסדר

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{y} = \frac{\mathrm{dx}}{x-1}$$

וקיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$\ln|y| = \ln|x-1| + C$$

לכן $|y| = |x-1|\,e^{C}$ ואז

$$y = \pm\,(x-1)\,e^{C}.$$

נציב תנאי התחלה

$$1 = y(0) = \pm\,(-1)\,e^{C}$$

לכן צריך לקחת את הפתרון עם המינוס ו $C=0$. התשובה הסופית היא

$$y(x) = -\,(x-1).$$

2. מצאו פתרון למד"ר $\frac{y}{x}y' = -1$ המקיים את תנאי ההתחלה $y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

פתרון: נסדר

$$yy' = -x$$

$$y\text{dy} = -x\text{dx}$$

וקיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

לכן $y^2 = -x^2 + C$ ואז

$$y = \pm\sqrt{C - x^2}.$$

נציב תנאי התחלה

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} = y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm\sqrt{C - \frac{1}{2}}$$

לכן צריך לקחת את הפתרון עם המינוס ו $C - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. לכן $C = 1$ והתשובה הסופית היא

$$y(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

3. מצאו פתרון למד"ר $2x^2y'' - xy' + y = x$ המקיים $y(1) = 2, y'(1) = \frac{5}{2}$.

פתרון: נתחיל עם המד"ר ההומגנית

$$2x^2y'' - xy' + y = 0$$

שהיא משוואת אוילר. נציב $y = x^r$ ונקבל

$$2x^2r\left(r-1\right)x^{r-2} - xrx^{r-1} + x^r = 0$$

$$2r\left(r-1\right)x^r - rx^r + x^r = 0$$

ונצמצם את x^r. נקבל

$$2r\left(r-1\right)-r+1=0$$

$$\left(2r-1\right)\left(r-1\right)=0$$

שפתרונותיה הם $r=1,\frac{1}{2}$ (כל אחד מריבוי 1). לכן $x,\sqrt{x}$ הם פתרונות למד"ר ההומגנית. הם בת"ל בגלל ש

$$\det\begin{pmatrix} x & \sqrt{x} \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{pmatrix}=\frac{x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{-x}{2\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}\sqrt{x}$$

שונה מאפס באיזור 1 (ששמה תנאי ההתחלה). לכן הפתרון הכללי להומגנית הוא

$$y_h=d_1x+d_2\sqrt{x}$$

ונמצא פתרון פרטי y_p למד"ר הלא הומגנית בעזרת וריאצית המקדמים. נסמן

$$y_p(x)=c_1(x)\cdot x+c_2(x)\cdot\sqrt{x}$$

כאשר c_i נמצא בעזרת c_i'. נציג את המד"ר בצורה

$$y''-\frac{1}{2x}y'+\frac{1}{2x^2}y=\frac{1}{2x}$$

בשביל לגלות ש $f(x)=\frac{1}{2x}$. חשבו כבר ש $\det\begin{pmatrix} x & \sqrt{x} \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\sqrt{x}$ ולכן

$$c_1'(x)=\frac{\det\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{x} \\ \frac{1}{2x} & \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{pmatrix}}{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}=\frac{1}{x}$$

$$c_2'(x)=\frac{\det\begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{1}{2x} \end{pmatrix}}{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}=-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

לכן $c_1(x)=\ln|x|$ ו $c_2(x)=-2\sqrt{x}$. לכן

$$y_p(x)=\ln|x|\cdot x-2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x\ln|x|-2x$$

והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית בתרגיל הוא

$$y = y_p + y_h = (x \ln|x| - 2x) + d_1 x + d_2\sqrt{x}$$

ונציב תנאי התחלה למצוא את הקבועים d_i.

$$2 = y(1) = -2 + d_1 + d_2$$

לכן $d_1 = 4 - d_2$. נגזור

$$y' = \ln|x| + 1 - 2 + d_1 + \frac{d_2}{2\sqrt{x}}$$

ונציב

$$\frac{5}{2} = y'(1) = -1 + d_1 + \frac{d_2}{2} = -1 + (4 - d_2) + \frac{d_2}{2} = 3 - \frac{d_2}{2}$$

לכן $\frac{1}{2}d_2 = \frac{1}{2}$. לכן $d_2 = 1$ ו $d_1 = 4 - d_2 = 3$. סה"כ הפתרון הוא לתרגיל הוא

$$\begin{aligned} y(x) &= (x \ln|x| - 2x) + d_1 x + d_2\sqrt{x} \\ &= (x \ln|x| - 2x) + 3x + \sqrt{x} \\ &= x \ln|x| + x + \sqrt{x} \end{aligned}$$

4. חפץ בעל מסה של $m = 1\text{kg}$ נעזב במהירות אפס ונופל לעבר הרצפה. נניח כי קבוע הכבידה הוא $g = 9.8m/s^2$.

(א) נניח שאין התנגדות אוויר, והכוח היחיד שפועל על החפץ הוא כוח המשיכה mg. מאיזה גובה עלינו להפיל את החפץ כך שיפגע ברצפה לאחר 3 שניות?

פתרון: נסמן את הרצפה ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט רוצים למצוא את $y(0)$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot g = g$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). לכן הכח הוא $-g$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל על הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g = ma = a$$

או $-g = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t) = -gt + c$$

ונציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבוע c. נתון כי $y'(0) = 0$ (אין מהירות התחלתית) לכן

$$0 = y'(0) = -g \cdot 0 + c = c$$

ולכן $y'(t) = -gt$. המיקום הוא

$$y = \int y' = -g\frac{t^2}{2} + D$$

רוצים ש $y(3) = 0$ לכן

$$0 = -g\frac{3^2}{2} + D$$

ומכאן ש $D = \frac{9}{2}g$. לכן $y(t) = -g\frac{t^2}{2} + \frac{9}{2}g$ והמיקום ההתחלתי הוא $y(0) = \frac{9}{2}g$.

(ב) נניח שהתנגדות האוויר היא bv כאשר $b = 0.05$ ו v היא מהירות הנפילה במטר לשנייה. מאיזה גובה עלינו להפיל את החפץ כך שיפגע ברצפה לאחר 3 שניות?

פתרון: נסמן את הרצפה ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט רוצים למצוא את $y(0)$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot g = g$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל bv וכיוונו הפוך מהכיוון של v לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-bv$. לכן הכח הכולל הוא $-g - bv$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל על הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g - bv = ma = a$$

או $-g - by'(t) = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z = y'$ ונקבל

$$z' + bz = -g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ (עבור $a(x) = b, b(x) = -g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x) = bx$ ונציב

$$e^{-bx}\left(C - \int ge^{bx}\mathrm{dx}\right) = e^{-bx}\left(C - \frac{g}{b}e^{bx}\right) = e^{-bx}C - \frac{g}{b}$$

לכן:

$$z(t) = e^{-bt}C - \frac{g}{b}$$

או

$$.y'(t) = e^{-bt}C - \frac{g}{b}$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0) = 0$ (אין מהירות התחלתית) לכן

$$0 = y'(0) = e^{-b\cdot 0}C - \frac{g}{b} = C - \frac{g}{b}$$

ומכאן $C = \frac{g}{b}$. מכאן ש

$$y'(t) = \frac{g}{b}e^{-bt} - \frac{g}{b}$$

ו

$$.y = \int y = -\frac{g}{b^2}e^{-bt} - \frac{g}{b}t + D$$

רוצים ש $y(3) = 0$ לכן

$$0 = -\frac{g}{b^2}e^{-3b} - 3\frac{g}{b} + D$$

ומכאן ש $D = \frac{g}{b^2}e^{-3b} + 3\frac{g}{b}$. לכן $y(t) = -\frac{g}{b^2}e^{-bt} - \frac{g}{b}t + \left(\frac{g}{b^2}e^{-3b} + 3\frac{g}{b}\right)$ והמיקום ההתחלתי הוא

$$.y(0) = -\frac{g}{b^2} + \frac{g}{b^2}e^{-3b} + 3\frac{g}{b}$$

5. נסמן ב D את אופרטור הגזירה, וב I את אופרטור הזהות.

(א) עבור $T = D - I$ מצאו $0 \neq y \in \ker T$.

פתרון: זה שקול למצוא פתרון למד"ר

$$y' - y = 0$$

שבהעברת אגף ורישום שקול $\frac{1}{y}\mathrm{dy} = 1\mathrm{dx}$ ולכן $\ln|y| = x$ פתרון (לקחנו את הקבוע להיות 0). מכאן ש

$$|y| = e^x$$

ונבחר את הפתרון החיובי $y = e^x$.

(ב) עבור $S = (x-1)\,D - I$ מצאו $0 \neq y \in \ker S$.

פתרון: זה שקול למצוא פתרון למד"ר

$$(x-1)\,y' - y = 0$$

שבהעברת אגף ורישום שקול $\frac{1}{y}\mathrm{dy} = \frac{1}{x-1}\mathrm{dx}$ ולכן $\ln|y| = \ln|x-1|$ פתרון (לקחנו את הקבוע להיות 0). מכאן ש

$$|y| = |x-1|$$

ונבחר את הפתרון $y = x - 1$.

(ג) מצאו מד"ר לינארית הומוגנית מסדר שני כך שמתקיים כי $y_1 = e^x, y_2 = x$, הם פתרונות שלה.

פתרון: ראינו ש

$$Ty_1 = (D-I)\,y_1 = 0$$

נבדוק מה T עושה ל y_2:

$$Ty_2 = (D-I)\,x = 1 - x$$

ראינו ש $S\,(x-1) = 0$ ולכן גם $S\,(1-x) = 0$ (כי S לינארית). לכן

$$STy_2 = 0$$

וגם $STy_1 = Sy_1 = S0 = 0$. לכן $y_1, y_2 \in \ker ST$. מתקיים

$$\begin{aligned} ST &= ((x-1)\,D - I)\,(D - I) \\ &= (x-1)\,D^2 - (x-1)\,D - D + I \\ &= (x-1)\,D^2 - xD + I \end{aligned}$$

ולכן y_1, y_2 פתרונות למד"ר

$$. (x-1)\,y'' + (x-2)\,y' + y = 0$$