

אנליזה מודרנית תש"ף - תרגיל 5

להגשה עד 11.12.19

הגדרה: פונקציה אי-שלילית $f : X \rightarrow [0, \infty]$ היא אינטגרבילית לבג אם $\int_X f d\mu < \infty$.

הערה: תהיינה $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ פונקציות מדידות. אז

$$\int_X f d\mu + \int_X g d\mu = \int_X (f + g) d\mu$$

שאלה 1

תהיינה $f, f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ פונקציות מדידות כך ש- $f_n \rightarrow f$, ו- $f \geq f_n$ לכל n . הוכיחו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

שאלה 2

תהי f פונקציה אי-שלילית אינטגרבילית. נגדיר $F(x) = \int_{-\infty}^x f d\mu$. הראו כי F רציפה בעזרת משפט ההתכנסות המונוטונית.

שאלה 3

יהי (Ω, S, μ) מרחב מידה ותהי $X \subseteq \Omega$ קבוצה המקיימת $\mu(X) = 1$. תהיינה $A, B, C \subseteq X$ קבוצות מדידות, כך ש- $\mu(A) + \mu(B) + \mu(C) \geq 2.5$. האם יתכן ש- $A \cap B \cap C = \emptyset$? הדרכה - התבוננו באינטגרל של סכום פונקציות האינדיקטור המתאימות.