

בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן
מבחן בקורס: אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)
מספרי הקורס: 8821105 + 8821108
המרצה: מיכאל מגרל
המתרגלים: אפי כהן וגילי גולן
תאריך: 08.11.12 מועד ב'
חומר עזר: רק מחשבון רגיל
משך המבחן: שעתיים וחצי

יש לפתור בדיוק 4 מתוך 5 שאלות (כל שאלה שווה 25 נקודות)
בנוסף יש גם שאלת בונוס השווה 5 נקודות.
נמקו היטב את כל התשובות.

השאלות:

1.

- א. הוכיחו את משפט Burnside (מספר מסלולים).
- ב. באמצעות משפטי סילו הוכיחו שכל חבורה בגודל 77 היא חבורה לא פשוטה.
- ג. הוכיחו שחבורה סימטרית $G := S_4$ היא חבורה פתירה.

2.

- א. הוכיחו שלכל חבורה G מתקיים $G/Z(G) \cong Inn(G)$ כאשר $Inn(G) \leq Aut(G)$ חבורה של אוטומורפיזמים פנימיים עבור G .
- ב. הוכיחו $Aut(\Omega_n) \cong U_n$.
- ג. כמה חבורות אבליות בגודל 10000 קיימות (עד כדי איזומורפיזם)?
כמה מהן מכילות ת"ח **ציקלית** בגודל 125?

3.

- א. הוכיחו את משפט Lagrange.
- ב. מצאו איזומורפיזם $\mathbb{R}_+ \times \Omega_2 \cong \mathbb{R}^*$ ותארו תת חבורה H בחבורה $G := \mathbb{C}^* \times \mathbb{Z}_{2012}$ כך שחבורת מנה G/H איזומורפית ל \mathbb{R}^* .
- ג. הוכיחו או הפריכו: קיים אפימורפיזם $f : D_{2012} \rightarrow D_{503}$.

4.

- א. יהי $f: Z_{22} \rightarrow D_{10}$ הומומורפיזם לא טריוויאלי (כלומר, $\text{Im } f \neq \{e\}$). מצאו את $\ker f$.
- ב. הוכיחו או הפריכו: קיים מונומורפיזם $U_5 \times \mathbb{Z}_5 \rightarrow S_{10}$.
- ג. הוכיחו או הפריכו: חבורה דיהדרלית D_n לכל $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ איזומורפית לחבורת מנה של חבורה חופשית $F(a, b)$ מעל קבוצה $X = \{a, b\}$ של שני סמלים.

5. א. בניח G חבורה ו $X := \text{Sub}(G)$ קבוצה של כל תתי חבורות של G . הוכיחו שהפונקציה $\alpha: G \times X \rightarrow X, \alpha(g, H) := gHg^{-1}$ מגדירה פעולה.
- ב. תארו את כל המסלולים ומייצבים של הפעולה מסעיף א במקרה של חבורה סימטרית $G := S_3$.
- ג. הוכיחו את המשפט: כל חבורת p היא פתירה.

שאלת הבנוס: (5 נקודות)

- תהי S אגודה. הוכיחו: S חבורה אם ורק אם לכל $a, b \in S$ קיימים פתרונות יחידים למשוואות $ya = b, ax = b$.

😊 **בהצלחה!**