תרגול 3 מבנים אלגבריים

5 באפריל 2021

1 סדר של איבר ותת־חבורה ציקלית

הגדרה: תהי G חבורה, ויהי $g \in G$ אז הסדר של g הוא:

$$o(g) = \min\{n \in \mathbb{N} : g^n = e\}$$

ואם אין n כזה, אז נסמן $o(g) = \infty$.

דוגמאות: נמצא את כל הסדרים של איברי $\mathbb{Z}_6$, ולפי זה נמצא את תת־החבורות הציקליות של $\mathbb{Z}_6$:

האיבר		הסדר	תת־חבורה ציקלית
0		1	$\langle 0\rangle = \{0\}$
1	$\underbrace{1+1}_{2}+1+1+1+1 = 6 \equiv 0(\mod 6)$	6	$\langle 1\rangle = \{1,2,3,4,5,0\} = \mathbb{Z}_6$
2	$2+2+2 = 6 \equiv 0(\mod 6)$	3	$\langle 2\rangle = \{2,4,0\}$
3	$3+3 = 6 \equiv 0(\mod 6)$	2	$\langle 3\rangle = \{3,0\}$
4	$4+4+4 = 12 \equiv 0(\mod 6)$	3	$\langle 4\rangle = \{4,2,0\} = \langle 2\rangle$
5	$5+5+5+5+5+5 = 30 \equiv 0(\mod 6)$	6	$\langle 5\rangle = \{5,4,3,2,1,0\} = \mathbb{Z}_6$

ראיתם שכל איבר מגדיר תת־חבורה ציקלית - אוסף החזקות שלו, והיא תת־חבורה שהגודל שלה הוא הסדר של האיבר.

2 הרחבה לגבי S_n

ראינו הצגה "מטריצית" של תמורות. נראה כעת הצגה לפי מחזורים. יהיו $i_1, \ldots, i_m \in [n]$ m מספרים שונים, אז נגדיר את התמורה $\sigma = (i_1, \ldots, i_m)$ להיות:

$$\sigma(k) = \begin{cases} i_{j+1} & \exists j < m : k = i_j \\ i_1 & k = i_m \\ k & else \end{cases}$$

לדוגמא, נראה מי זו התמורה $(1,2,3)(4) \in S_4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

הערות:

- שני מחזורים ייקראו זרים, אם המספרים בהם שונים. למשל $(1,2),(3,4)$ זרים, ואילו $(1,2,3),(3,4)$ אינם זרים.
- ניתן להרכיב מחזורים: יהיו $\sigma = (i_1, \dots i_m), \pi = (j_1, \dots j_k)$ אז:

$$\sigma \circ \pi(a) = \sigma(\pi(a))$$

- כל תמורה ניתן להציג כהרכבת מחזורים זרים. נראה דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (1,2,3) \circ (4,5) \circ (6)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (1,2,6,5,3)$$

- דוגמא להרכבת מחזורים לא זרים: נניח $(1,2,3),(3,5) \in S_6$:

$$(1,2,3) \circ (3,5)[1] = 2$$

$$(1,2,3) \circ (3,5)[2] = 3$$

$$(1,2,3) \circ (3,5)[3] = 5$$

$$(1,2,3) \circ (3,5)[5] = 1$$

$$(1,2,3) \circ (3,5)[4] = 4, (1,2,3) \circ (3,5)[6] = 6$$

בסה"כ:

$$(1,2,3) \circ (3,5) = (1,2,3,5)$$

- נרצה לחשב סדר של מחזור. נראה מה קורה כשהוא מורכב על עצמו:

$$(1,2,3,5)(1,2,3,5)=(1,3)(2,5)$$

$$(1,2,3,5)^3=(1,2,3,5)(1,3)(2,5)=(1,5,3,2)$$

$$(1,2,3,5)^4=(1,2,3,5)(1,5,3,2)=(1)(2)(3)(5)=id$$

באופן כללי, הסדר של מחזור מאורך k הוא k.

תת־חבורה ציקלית	הסדר	חישובים	האיבר
$\{id\}$	1		id
$\langle(1,2)\rangle=\{(1,2),id\}$	2	$(1,2)(1,2)=id$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=(1,2)$
$\langle(2,3)\rangle=\{(2,3),id\}$	2	$(2,3)(2,3)=id$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=(2,3)$
	2		$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=(1,3)$
$\langle(1,2,3)\rangle=\{(1,2,3),(1,3,2),id\}$	3	$(1,2,3)(1,2,3)=(1,3,2)$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1,2,3)$
$\langle(1,3,2)\rangle=\{(1,2,3),(1,3,2),id\}$	3		$(1,3,2)$