מתמטיקה בדידה – פתרון תרגיל 4

שאלה 1

תהי קבוצה לא ריקה A ותהי פונקציה $f:A\to A$. נגדיר פונקציה $g:A\to P(A)$ ע"י
$g(a)=f^{-1}\left[f[\{a\}]\right]\triangle f\left[f^{-1}[\{a\}]\right]$

א. הוכח/הפרך: אם g אינה חח"ע אז f חח"ע

ב. הוכח/הפרך: אם f חח"ע אז g אינה חח"ע

ג. הוכח/הפרך: אם f על אז g חח"ע

א. **הפרכה**: $f(1)=2, f(2)=2, f(3)=4, f(4)=3$ אינה חח"ע ומתקיים:
$g(3)=g(4)=\phi$

ב. **הפרכה**: $A=\{1\}$ כל פונקציה היא חח"ע כאשר המקור מכיל איבר אחד בלבד.

ג. **הפרכה:** $A=\{1,2\}, f(1)=1, f(2)=2$ אבל $g(1)=g(2)=\phi$

שאלה 2

יהיו A,B קבוצות סדורות חלקית. תהי $f:A\to B$ פונקציה המקיימת
$\forall x,y\in A: x\le y\to f(x)\le f(y)$

א. נניח B סדורה באופן מלא. הוכח/הפרך: $\forall x,y\in A: x\le y\leftrightarrow f(x)\le f(y)$

ב. נניח A סדורה באופן מלא. הוכח/הפרך: $\forall x,y\in A: x\le y\leftrightarrow f(x)\le f(y)$

א. **הפרכה:** ייתכן ולא ניתן להשוות בין אף שני איברים במקור, ולכן הנתון מתקיים באופן ריק וכל פונקציה תהווה הפרכה אם במקור יש 2 איברים ומעלה.

ב. **הפרכה:** לכל $x,y\in A$ נתון כי $x\le y$ גורר $f(x)\le f(y)$.
בכיוון ההפוך, נניח כי $f(x)\le f(y)$. כיוון ש A סדורה באופן מלא מקיים $x\le y$ או $x\ge y$. אם $x\ge y$ אז לפי הנתון $f(x)\ge f(y)$ ולכן $f(x)=f(y)$. מכאן אנו למדים על דוגמא נגדית: ניקח פונקציה כלשהי שאינה חח"ע, ואז כיוון ש $f(x)=f(y)$ ניתן להשוות את התמונות בשני הכיוונים ואילו את המקורות ניתן להשוות בכיוון אחד בלבד.

שאלה 3

תהי פונקציה $f: A \to B$. נגדיר יחס R על $P(B)$ על ידי $(X,Y) \in R \Leftrightarrow f^{-1}[X] \triangle f^{-1}[Y] = \phi$

הוכח/הפרך: R יחס שקילויות.

<u>הוכחה:</u> נשים לב לשקילות הבאה $A = B \Leftrightarrow A \triangle B = \phi$. מכאן קל להראות רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות.

שאלה 4

תהי פונקציה $f: A \to B$. נגדיר פונקציה $g: P(B) \to P(A)$ ע"י $g(X) = f^{-1}[X]$

א. הוכח/הפרך: $Y \in im(g)$ (התמונה) אם"ם $f^{-1}[f[Y]] = Y$

ב. הוכח/הפרך: g חח"ע אם"ם f הפיכה

ג. הוכח/הפרך: g אינה על

א. **<u>הוכחה:</u>**

הכיוון הראשון טריוויאלי שכן אם $f^{-1}[f[Y]] = Y$ אזי לפי הגדרה $g(f[Y]) = Y$ ולכן $Y \in im(g)$.

בכיוון השני, נניח $Y \in im(g)$ לכן קיימת X כך ש $g(X) = Y$. לפי הגדרה $f^{-1}[f[Y]] = \{a \in A : f(a) \in f[Y]\}$ ברור אם כך ש $Y \subseteq f^{-1}[f[Y]]$. נניח בשלילה שהם לא שווים, לכן קיים $x \notin Y$ כך ש $f(x) \in f[Y]$. אבל לפי ההגדרה של $f[Y]$ קיים $y \in Y$ כך ש $f(x) = f(y)$.

לכן, אם $Y = g(X) = f^{-1}[X] = \{a \in A : f(a) \in X\}$ אזי $f(x) = f(y) \in X$ ולכן $x \in f^{-1}[X] = Y$ בסתירה.

ב. **<u>הפרכה:</u>**

ניקח $B = \{1\}$, $A = \{1,2\}$, $f(1) = f(2) = 1$.

לכן $g(\phi) = \phi, g(\{1\}) = \{1,2\}$ כלומר g חח"ע, וכמובן ש f אינה חח"ע ולכן אינה הפיכה.

ג. **<u>הפרכה:</u>**

ניקח $f(1) = 1$, $A = B = \{1\}$. לכן $g(\phi) = \phi, g(\{1\}) = \{1\}$ כאשר $P(A) = \{\phi, \{1\}\}$ ולכן g על

שאלה 5

תהי קבוצה X ותהי פונקציה $f:X\to X$. תהיינה $A,B\subseteq X$. הוכח/הפרך:

$f[A\setminus B^C]=f[A]\setminus\left(f[B]\right)^C$

הפרכה:

$f(n)=2n$ ונגדיר את A להיות קבוצת הזוגיים ו B קבוצת האי זוגיים.

כעת $f[A\setminus B^C]=f[\phi]=\phi$ ואילו $f[A]=f[A]\setminus B=f[A]\setminus\left(f[B]\right)^C$

שאלה 6

תהי קבוצה לא ריקה A. תהי קבוצה $B\subseteq P(A)$ כך שלכל $X,Y\in B$ מתקיים $X=Y$ או $X\cap Y=\phi$. נניח עוד כי קיימת פונקציה $f:B\to A$ המקיימת $\forall X\in B: f(X)\in X$

א. הוכח/הפרך: f חח"ע

ב. הוכח/הפרך: f על

ג. הוכח/הפרך: $B\neq P(A)$

ד. הוכח/הפרך: $f[B]=A$ אם"ם $\bigcup B=A$ ו B מכילה נקודונים בלבד

א. **הוכחה:** נניח $f(X)=f(Y)=a$ לפי ההגדרה $a\in X\wedge a\in Y$ ולכן $a\in X\cap Y$ ולכן $X\cap Y\neq\phi$ ולכן $X=Y$

ב. **הפרכה:** $A=\{1,2\},B=\{\{1\}\},f(\{1\})=1$. ל2 אין מקור.

ג. **הוכחה:** $\phi\notin B$ אחרת הפונקציה f אינה מוגדרת היטב כי לא קיים איבר בקבוצה הריקה. ולכן $B\neq P(A)$

ד. **הוכחה:** $f[B]=A$ לכן לכל $a\in A$ קיים $X\in B$ כך ש $a\in X$. לכן $\bigcup B=A$. נניח וקיים $X\in B$ שאינו נקודון. ראינו שהוא לא יכול להיות קבוצה ריקה, לכן הוא מכיל שני אברים שונים $a,b\in X$. לפי הנתונים שני האיברים הללו לא יכולים להיות באף קבוצה אחרת ששייכת ל B, ולכן לאחד מהם אין מקור, בסתירה.

בכיוון ההפוך, נניח $\bigcup B = A$ ו B מכילה נקודונים בלבד. כיוון $\bigcup B = A$ לכל $a \in A$ קיימת

קבוצה $X \in B$ כך ש $a \in X$. כיוון ש B מכילה נקודונים בלבד, $X = \{a\}$ ולכן בהכרח

$f(X) = a$.

לכן $f[B] = A$

שאלה 7

א. הוכח לפי ההגדרה כי $|[0,1]| = |(0,1]|$

פתרון במערכי התרגול אשר באתר.

ב. תהי A קבוצה אינסופית. הוכיחו שקיים יחס שקילות על A בעל שני מחלקות שקילות שכל אחת מהן מעוצמה שווה ל A. (רמז: מותר להשתמש בעובדה ש $|A| = |A \times \{1,2\}|$)

כיוון ש $|A| = |A \times \{1,2\}|$ קיימת פונקציה חח"ע ועל $f : A \to A \times \{1,2\}$. יחס השקילות הרצוי מוגדר

על ידי: שני איברים ב A שקולים אם"ם f שולחת אותם לזוג סדור עם אותו המספר בחלק הימני.

מחלקות השקילות הינן $f^{-1}(A \times \{1\}), f^{-1}(A \times \{2\})$. כיוון שזו פונקציה הופכית,

$|f^{-1}(A \times \{1\})| = |A \times \{1\}| = |A|$, $|f^{-1}(A \times \{2\})| = |A \times \{2\}| = |A|$

ג. הוכח לפי ההגדרה כי $|P(A)| = |\{ f \mid f : A \to \mathbb{Z}_2 \}|$ (כלומר עוצמת קבוצת החזקה שווה לעוצמת קבוצת כל הפונקציות הנ"ל)

פתרון במערכי התרגול אשר באתר.