

Exercise #3 in Probability and Stochastic processes:

שני דפים – השני באנגלית

1. In the primary elections in the "Israel" party, candidate A got a votes and overcame candidate B who got only b votes. Assume the ballots are counted in a random order one at a time. Show that the probability that candidate A lead over candidate b throughout the whole count is $(a-b)/(a+b)$. (hint in white below)
2. A gambler plays the following game. In each round, he can pay any $0 < p < 1$ dollars, and win \$1 with probability p (independently). Show that the probability that the gambler's net gain exceeds h at any of the first n rounds is at most $\exp(-h^2/2n)$.
3. ** Let X_n be a martingale with $E[X_0]=0$ and $E[X_n^2]<\infty$
Show that $P(\text{Max}_{0 \leq i \leq n} X_i > r) \leq E[X_n^2]/(E[X_n^2]+r^2)$

Hints:

a. The **Cauchy–Schwarz inequality** states that for all vectors x and y of an inner product space it is true that $|\langle x,y \rangle| \leq \sqrt{\langle x,x \rangle \langle y,y \rangle}$

This is **perhaps the most useful inequality in mathematics**.

In terms of expectations of random variables it tells us that

$$E^2[XY] \leq E[X^2]E[Y^2]$$

If you have not seen a proof, please look for one in a textbook/Wikipedia or do it yourselves.

b. Use the C-S inequality to prove the following useful inequality on non-negative random variables:

If X is a non-negative random variable then

$$P(X > 0) \geq \frac{E^2[X]}{E[X^2]}$$

Note that this is a special case of the more general **Paley-Zygmund inequality**, saying that for a non-negative random variable X , and $0 \leq a < 1$

$$P(X > aE[X]) \geq (1 - a)^2 \frac{E^2[X]}{E[X^2]}$$

c. Now prove an inequality similar to b. for the martingale sequence:

Use C-S with the functions $X=(r-X_n)$ and Y =the indicator function for $\{\text{Max}_{0 \leq i \leq n} X_i < r\}$.

4. True or false (proof please...). (All random variables are defined on the same probability space)
 - A. If $\{X_n\}, \{Y_n\}$ are martingale sequences w.r.t. their natural filtrations, then so is $\{X_n + Y_n\}$
 - B. If $\{X_n\}, \{Y_n\}$ are martingale sequences w.r.t. the same filtration $\{F_n\}$, then so is $\{X_n + Y_n\}$

5. Give an example of a martingale sequence that converges a.s. but not in expectation. (i.e. in L^1)

1. יהיה $\{X_n\}_{n \geq 0}$ הלוח מקרי מוטה על השלמים שמתחיל מ $X_0 = 1$ והלוח בכל צעד ימינה בסיכוי $\frac{1}{3}$ ושמאלה בסיכוי $\frac{2}{3}$. (כלומר $\{X_n\}_{n \geq 0}$ שרשרת מרקוב עם הסתברויות מעבר $P(X_{n+1} = X_n + 1) = \frac{1}{3}$, $P(X_{n+1} = X_n - 1) = \frac{2}{3}$)

א. הוכיחו ש $R_n = 2^{X_n}$ ו $M_n = X_n + \frac{n}{3}$ הם מרטינגלים.

ב. מצאו את ההסתברות שהלוח יגיע ל N לפני שיגיע ל 0 .

ג. מצאו את תוחלת הזמן שייקח להלוח עד שיפגע באחד מקצוות הקטע $[0, N]$. (כלומר את $E[\tau_{\{0, N\}}]$)

2. א. פוליה החליט לשנות מעט את תהליך הכד שלו. כעת בכל שלב, במקום להוציא כדור מקרי מהכד ולהחזיר 2 מאותו צבע במקום, הוא מחזיר 3 כדורים מאותו צבע (כלומר בכל שלב מתווספים לכד שני כדורים חדשים). נניח כעת שמתחילים עם כד בו 2 כדורים אדומים ואחד כחול.

a. מצאו מרטינגל שמסתתר בתהליך 0 זה יעזור לסעיפים הבאים

b. חשבו את הסיכוי שבשלב ה רביעי יישלף מהכד כדור אדום.

c. יהא X_n אחוז הכדורים האדומים בכד לאחר n שלבים. הראו שקיים משתנה מקרי X כך ש

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \text{ בהסתברות } 1.$$

3. חשבו את תוחלת הזמן שלוקח להלוח מקרי סמטרי עצלן על $[0, N]$ שמתחיל ב k

($0 < k < n$) ובכל צעד נשאר במקום בסיכוי $\frac{1}{3}$, הולך ימינה בסיכוי $\frac{1}{3}$ והולך שמאלה בסיכוי $\frac{1}{3}$, עד שהוא פוגע ב 0 או n .

4. מהמר משחק בקזינו הוגן. בכל שלב הוא יכול לשלם שקל כדי לשחק ברולטה בה יזכה ב 3 שח בסיכוי שלישי, או במטבע הכסף בו יזכה ב 2 שח בסיכוי חצי. (כלומר אם זכה במשחק השני יש לו רווח של $1=2-1$ שח).

נניח שהמהמר מתחיל עם 100 שח ומטרתו להגיע ל 300 שח לפני שיאבד כל כספו.

א. הוכיחו שאין אסטרטגיה של המהמר שתיתן לו סיכוי של יותר מ $\frac{1}{3}$ להגיע לרווח של 300 השקלים. (10)

ב. תתארו אסטרטגיה אופטימלית עבור המהמר שלנו. הוכיחו כי היא אופטימלית. (7)

ג. בעל הבית השתגע ומרשה למהמר גם להמר עד 100 שח ברולטה באותו יחס גם אם אין בכיסו 100 שח

(כלומר לשלם עד x ולקבל $3x$ בסיכוי שלישי). האם אפשר לשפר את האסטרטגיה מ א? הוכיחו את

טענתכם. (10)