

# תרגיל בית 12 – טופולוגיה 2014

## שאלה 1

**א.** נגדיר יחס שקילות על  $\mathbb{R}^2$ :  $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2$ . הוכיחו

כי  $\mathbb{R}^2 / \sim$  הומיאומורפי ל-  $\mathbb{R}$ .

רמז: מצאו את ההעתקה ההפוכה ל-  $\hat{f}$  מ-  $\mathbb{R}$  ל-  $\mathbb{R}^2 / \sim$ .

**ב.** נגדיר יחס שקילות על  $\mathbb{R}^2$ :  $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ . למה

הומיאומורפי  $\mathbb{R}^2 / \sim$ ?

## שאלה 2

יהי  $X$  מרחב המנה של  $\mathbb{R}$  המתקבל מיחס השקילות הבא:

$$x \sim y \Leftrightarrow (x = -y) \vee (x = y). \text{ הראו ש- } X \text{ הומיאומורפי ל- } [0, \infty).$$

## שאלה 3

יהי  $X$  מרחב המנה של  $\mathbb{R}$  המתקבל על-ידי זה שמזהים זו לזו את כל הנקודות

$x \in \mathbb{R}$  כך ש-  $|x| \geq 1$ . בלשון אחרת,  $X$  הוא מרחב המנה  $\mathbb{R} / \sim$  כאשר  $\sim$  הוא יחס

שקילות המוגדר באופן הבא:  $x \sim y$  אם ורק אם  $x = y$  או  $|x| \geq 1$  וגם  $|y| \geq 1$ . הראו

ש-  $X$  הומיאומורפי למעגל  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ .

## שאלה 4

מצאו דוגמה להעתקת מנה שאינה פתוחה ואינה סגורה.

## שאלה 5

נתבונן ב-  $\mathbb{R}$  ובתת-קבוצה שלו  $S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ . נאמר ש-  $C \subseteq \mathbb{R}$  היא קבוצה

סגורה אם  $C = A \cup T$  כאשר:  $A$  היא תת-קבוצה סגורה של  $\mathbb{R}$  בטופולוגיה האוקלידית, ו-  $T$  היא תת-קבוצה כלשהי של  $S$ . הוכחתם בתרגיל בית 5 שהמשלימים של הקבוצות הסגורות הללו יוצרים טופולוגיה על  $\mathbb{R}$ . נסמן את הטופולוגיה הזאת ב-  $\tau$ .

- א.** נאפיין את הקבוצות הפתוחות: הוכיחו כי  $O \in \tau$  אם"מ  $O = B \cap T$  כאשר  $B$  היא תת-קבוצה פתוחה של  $\mathbb{R}$  בטופולוגיה האוקלידית ו-  $S^c \subseteq T$ .
- ב.** הוכיחו כי  $\tau$  מכילה את הטופולוגיה האוקלידית והסיקו ש-  $(\mathbb{R}, \tau)$  הוא  $T_2$ .
- ג.** הראו שאם  $O \in \tau$  כך ש-  $S \subseteq O$  אזי  $O$  פתוחה בטופולוגיה האוקלידית.
- ד.** הוכיחו שלא קיימות  $U, V \in \tau$  זרות כך ש-  $S \subseteq U, 0 \in V$  והסיקו ש-  $(\mathbb{R}, \tau)$  אינו  $T_3$ .

**בהצלחה בבחינה!**