תרגיל בית 5 אינפי 3

1. באילו נקודות במישור הפונקציות הבאות דיפרנציאביליות? הוכח. (שימו לב שהשאלה היא לא רק לגבי $(0,0)$ אלא לגבי כל הנקודות במישור).

(א) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

פתרון. נתחיל בכך שנוכיח כי f דיפרנציאבילית בכל נקודה שבה $(x,y) \neq 0$. קל לראות ש f רציפה בנקודות אלה כי היא מכפלה/חיבור/חילוק של פונקציות רציפות. נחשב את הנגזרות החלקיות ונראה שהן רציפות

$$f_x^{'}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3+y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^4+3x^2y^2-2x^4-2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y^{'}(x,y) = \frac{4y^3(x^2+y^2) - 2y(x^3+y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^2y^3+4y^5-2x^3y-2y^5}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^2y^3+2y^5-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

ברור ששתי הנגזרות החלקיות רציפות בכל נקודה $(x,y) \neq (0,0)$ ולכן f דיפרנציאבילית בנקודות אלה. כעת נבדוק דיפרנציאביליות של f ב $(0,0)$. קל לראות ש f רציפה ב $(0,0)$ כי

$$|\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}| \leq |\frac{x^3}{x^2+y^2}|+|\frac{y^4}{x^2+y^2}| \leq |\frac{x^3}{x^2}|+|\frac{y^4}{y^2}| = |x|+|y^2| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

נחשב נגזרות חלקיות

$$f_x^{'}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = 1$$

$$f_y^{'}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$$

כעת נבדוק דיפרנציאביליות לפי הגדרה

$$f(h_1,h_2) = f(0,0) + h_1 + \epsilon(h)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

$$\frac{h_1^3+h_2^4}{h_1^2+h_2^2} = h_1 + \epsilon(h)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

$$\frac{h_2^4 - h_1h_2^2}{h_1^2+h_2^2} = \epsilon(h)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

$$\frac{h_2^4 - h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \epsilon(h)$$

נבדוק אם ביטוי זה מתכנס ל 0 כאשר $(h_1,h_2)\to(0,0)$. נתקדם לאורך הישר $h_1=h_2$ ונקבל

$$\frac{h_1^4-h_1^3}{(2h_1^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{h_1^4-h_1^3}{|h_1^3|}=\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{h_1^4}{|h_1^3|}-\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{h_1^3}{|h_1^3|}$$

$\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{h_1^4}{|h_1^3|}$ אמנם מתכנס ל 0 כאשר $h_1\to 0$ אבל ל $\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{h_1^3}{|h_1^3|}$ אין גבול כאשר $h_1\to 0$ ולכן הביטוי בכלל לא מתכנס ולכן f לא דיפרנציאבילית ב $(0,0)$.

לסיכום: f דיפרנציאבילית בנקודות $(x,y)\neq(0,0)$.

ב) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

פתרון. שוב, נתחיל בנקודות $(x,y)\neq(0,0)$. נמצא נגזרות חלקיות

$$f_x^{'}(x,y)=\frac{3x^2(\sqrt{x^2+y^2})-\frac{(x^3-y^2)(2x)}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{3x^4+3x^2y^2-x^4-xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{2x^4+3x^2y^2-xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_y^{'}(x,y)=\frac{-2y\sqrt{x^2+y^2}-\frac{(x^3-y^2)(2y)}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{-2x^2y-2y^3-x^3y+y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-2x^2y-y^3-x^3y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

שתי הנגזרות רציפות כאשר $(x,y)\neq(0,0)$ ולכן f דיפרנציאבילית בנקודות אלה. נעבור לנקודה $(0,0)$. קל לראות ש f רציפה מפני ש

$$|\frac{x^3-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}|\leq|\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}|+|\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}|\leq|\frac{x^3}{x}|+|\frac{y^2}{y}|=|x^2|+|y|\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}0$$

נחשב נגזרות חלקיות ב $(0,0)$:

$$f_x^{'}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{|h|}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{|h|}=0$$

$$f_y^{'}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h^2}{|h|}}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{h}{|h|}$$

הגבול הזה לא קיים. לכן $f_y^{'}(0,0)$ לא קיימת ולכן f לא דיפרנציאבילית ב $(0,0)$. לסיכום f דיפרנציאבילית בכל נקודה $(x,y)\neq(0,0)$.

ג) $f(x,y)=\ln(x^4+y^6+1)$.

פתרון. נחשב נגזרות חלקיות

$$f_x^{'}(x,y)=\frac{4x^3}{x^4+y^6+1}$$

$$f_y^{'}(x,y)=\frac{6y^5}{x^4+y^6+1}$$

שתי הנגזרות קיימות ורציפות בכל $\mathbb{R}^2$ ולכן f דיפרנציאבילית בכל $\mathbb{R}^2$.

ד) $$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{y^2}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

פתרון. נתחיל בבדיקת הנקודות שבהן $x\neq 0$, נמצא את הנגזרות החלקיות

$$f_x^{'}(x,y)=\sin\frac{y^2}{x}+x\cos\frac{y^2}{x}\cdot(-\frac{y^2}{x^2})=\sin\frac{y^2}{x}-\frac{y^2}{x}\cos\frac{y^2}{x}$$

$$f_y^{'}(x,y)=x\cos\frac{y^2}{x}\cdot(\frac{2y}{x})=2y\cos\frac{y^2}{x}$$

שתיהן קיימות ורציפות כאשר $x\neq 0$ ולכן f דיפרנציאבילית בנקודות אלה.

כעת נבדוק את הנקודות שבהן $x=0$. קל לראות ש f רציפה מפני ש

$$|x\sin\frac{y^2}{x}|\leq|x|\overset{(x,y)\to(0,y_0)}{\longrightarrow}0$$

נמצא נגזרות חלקיות בנקדות שבהן $x=0$ כלומר בנקודה $(0,y_0)$

$$f_y^{'}(0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h+y_0)-f(0,y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$f_x^{'}(0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,y_0)-f(0,y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\sin\frac{y_0^2}{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\frac{y_0^2}{h}$$

כאן צריך להפריד למקרים. אם $y_0\neq 0$ אז אין גבול. אם $y_0=0$ אז מתקבל גבול 0. לכן אם $y_0\neq 0$, f לא דיפרנציאבילית כי אין נגזרת חלקית. בנקודה $(0,0)$ שתי הנגזרות קיימות ויש לבדוק דיפרנציאביליות לפי הגדרה

$$f(h_1,h_2)=f(0,0)+\epsilon(h)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

$$h_1\sin\frac{h_2^2}{h_1}=\epsilon(h)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

$$\epsilon(h)=\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\sin\frac{h_2^2}{h_1}$$

נשים לב ש

$$|\sin x|\leq|x|$$

ולכן

$$\left|\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\sin\frac{h_2^2}{h_1}\right|\leq\left|\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\frac{h_2^2}{h_1}\right|$$
$$=\frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\leq\frac{h_2^2}{\sqrt{h_2^2}}=|h_2|\to 0$$

ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית.

2. נגדיר את $f(x,y)=(xy)^{\frac{2}{3}}$ על כל המישור $\mathbb{R}^2$.

(א) מצא את הנגזרת $f_x^{'}(x,y)$ בכל נקודה בה היא קיימת.

פתרון.

$$f_x^{'}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}-(xy)^{\frac{2}{3}}}{h}=$$
$$=y^{\frac{2}{3}}\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}{h}=y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}})'$$

נשים לב שבנקודות בהן $y=0$ מתקיים כי $f_x^{'}(x,y)=0$ ובנקודות בהן $y\neq 0$, מתקיים כי $f_x^{'}(x,y)=y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}})'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$. לכן לסיכום:

$$f_x^{'}(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} & x\neq 0\\ 0 & (x,y)=(0,0)\\ undefined & x=0 \quad y\neq 0\end{cases}$$

(ב) האם $f_x^{'}(x,y)$ חסומה בסביבת $(0,0)$?

אם $x\neq 0$ מתקיים כי $f_x^{'}(x,y)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ שהיא כמובן לא חסומה בסביבת $(0,0)$.

(ג) הוכח כי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב $(0,0)$.

i. ברור כי f רציפה בסביבת $(0,0)$, וחישבנו כבר $f_x^{'}(0,0)$, נחשב את $f_y^{'}(0,0)$:

$$f_y^{'}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

כעת נבדוק דיפרנציאביליות לפי הגדרה

$$f(h_1,h_2)=f(0,0)+\epsilon(h)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$
$$(h_1h_2)^{\frac{2}{3}}=\epsilon(h)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$
$$\epsilon(h)=\frac{(h_1h_2)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

נשתמש באי השוויון $2|x||y|\leq x^2+y^2$ ונקבל:

$$|\frac{(h_1h_2)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}|\leq|\frac{(h_1h_2)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{2h_1h_2}}|=\frac{1}{\sqrt{2}}(|h_1||h_2|)^{\frac{1}{6}}\xrightarrow{(h_1,h_2)\to(0,0)}0$$

לכן f דיפרנציאבילית ב $(0,0)$.

.3

(א) תהי $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאביליות בנקודה $(0,0)$. נגדיר

$$h(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & xy>0 \\ 0 & xy\le 0 \end{cases}$$

הוכיחו כי אם מתקיים

$$f(0,0)=0, \quad f_x^{'}(0,0)=0, \quad f_y^{'}(0,0)=0$$

אז $h(x,y)$ דיפרנציאבילית ב $(0,0)$.

פתרון. f דיפרנציאבילית ב $(0,0)$ ולכן לפי הגדרה

$$f(t_1,t_2)=f(0,0)+f_x^{'}(0,0)t_1+f_y^{'}(0,0)t_2+\epsilon(t)||t||$$

ומתקיים $\epsilon(t) \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ (אני משתמש ב t כי הסימון h תפוס כבר). לפי הנתונים זה בעצם אומר ש

$$f(t_1,t_2)=\epsilon(t)||t||$$

כלומר

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t_1,t_2)}{||t||}=0$$

נשים לב שלפי הגדרת $h(x,y)$

$$h(0,0)=0$$

$$h_x^{'}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{h(t,0)-h(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0$$

$$h_y^{'}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{h(0,t)-h(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0$$

נבדוק אם $h(x,y)$ דיפרנציאבילית ב $(0,0)$ לפי הגדרה

$$h(t_1,t_2)=h(0,0)+h_x^{'}(0,0)t_1+h_y^{'}(0,0)t_2+\epsilon(t)||t||$$

$$h(t_1,t_2)=\epsilon(t)||t||$$

$$\epsilon(t)=\frac{h(t_1,t_2)}{||t||}$$

נשים לב שלפי הגדרת h, מתקיים כי $h(t_1,t_2)=f(t_1,t_2)$ או $h(t_1,t_2)=0$.

לכן בכל מקרה $|h(t_1,t_2)|\le|f(t_1,t_2)|$, ולכן

$$|\frac{h(t_1,t_2)}{||t||}|\le|\frac{f(t_1,t_2)}{||t||}| \overset{(t_1,t_2)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

לכן h דיפרנציאבילית ב $(0,0)$.

(ב) תהינה $f(x,y)$ ו$g(x,y)$ שתי פונקציות דיפרנציאביליות בנקודה $(0,0)$. נגדיר

$$h(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & xy>0\\ g(x,y) & xy\leq 0\end{cases}$$

הוכיחו כי אם מתקיים

$$g(0,0)=f(0,0),\quad g_x^{'}(0,0)=f_x^{'}(0,0),\quad g_y^{'}(0,0)=f_y^{'}(0,0)$$

אז $h(x,y)$ דיפרנציאבילית ב $(0,0)$. (הערה: הטענה ההפוכה לטענה זו גם נכונה, מי שרוצה מוזמן לנסות להוכיח - מומלץ להשתמש בנגזרות מכוונות).

פתרון. נגדיר $T(x,y)=h(x,y)-g(x,y)$ ו $S(x,y)=f(x,y)-g(x,y)$ נשים לב ש S דיפרנציאבילית ב$(0,0)$ כי היא הפרש של שתי פונקציות שדיפרנציאביליות ב $(0,0)$ ובנוסף

$$S(0,0)=0\quad S_x^{'}(0,0)=0\quad S_y^{'}(0,0)=0$$

כמו כן,

$$T(x,y)=\begin{cases}S(x,y) & xy>0\\ 0 & xy\leq 0\end{cases}$$

לפי סעיף א', T דיפרנציאבילית ב $(0,0)$. ולכן גם $h(x,y)$ דיפרנציאבילית ב $(0,0)$ בתור סכום של דיפרנציאביליות ב $(0,0)$. ($h(x,y)=T(x,y)+g(x,y)$).

4. נגדיר פונקציה

$$f(x,y,z)=xy^2z^3$$

מצאו את הנגזרת הכיוונית של f בנקודה $(3,2,1)$ בכיוון $h=(h_1,h_2,h_3)$, שימו לב ש h לא בהכרח וקטור יחידה.

$f(x,y,z)=xy^2z^3$ וברור ש f דיפרנציאבילית כי נגזרותיה החלקיות רציפות. לכן נשתמש בנוסחא שמערבת גרדיאנט. חישוב פשוט מראה ש

$$\nabla f(x,y,z)=(y^2z^3,2xyz^3,3xy^2z^2)$$

ולכן

$$\nabla f(3,2,1)=(4,12,36)$$

הנגזרת הכיוונית בכיוון h היא

$$\frac{\partial f}{\partial h}=\frac{1}{||h||}\nabla f(3,2,1)\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix}=\frac{1}{||h||}(4,12,36)\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix}=\frac{4h_1+12h_2+36h_3}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}$$

5. תהי $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$ ומקיימת כי

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t,t)-f(t,-t)}{t}=1$$

מצאו את $f'_y(0,0)$.

נשים לב ש

$$1=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,t)-f(t,-t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,t)-f(0,0)+f(0,0)-f(t,-t)}{t}=$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t}-\lim_{t\to 0}\frac{f(t,-t)-f(0,0)}{t}=D_{(1,1)}f(0,0)-D_{(1,-1)}f(0,0)$$

בגלל ש f דיפרנציאבילית ב $(0,0)$ אנו יודעים כי

$$D_{(1,1)}f(0,0)=(f_x(0,0),f_y(0,0))\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=f_x(0,0)+f_y(0,0)$$

$$D_{(1,-1)}f(0,0)=(f_x(0,0),f_y(0,0))\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=f_x(0,0)-f_y(0,0)$$

ולכן

$$1=D_{(1,1)}f(0,0)-D_{(1,-1)}f(0,0)=2f_y(0,0)$$

כלומר

$$f_y(0,0)=\frac{1}{2}$$