פתרון – תרגיל בית 3 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן

1) נתונה משוואה ריבועית $ax^2+bx+c=0$. (אין קשר בין הסעיפים).

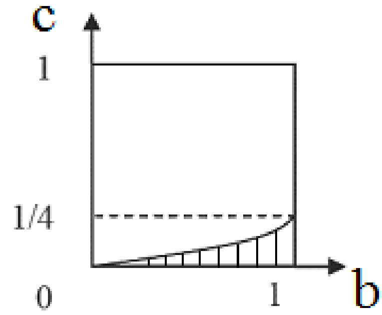
א. נתון: $a=4, b=4Y, c=Y+2$, כאשר $Y\sim U\left[0,5\right]$ מ"מ רציף. מה ההסתברות שלמשוואה ישנם שני פתרונות ממשיים?

ב. נתון: $a=1$, ו- $b\sim U\left[0,1\right], c\sim U\left[0,1\right]$ – מ"מ רציפים. מה ההסתברות שלמשוואה ישנם שני פתרונות ממשיים?

פתרון:

א). למשוואה $4x^2+4Yx+Y+2=0$ יש שני פתרונות ממשיים אם $(4Y)^2-4\cdot4\cdot(Y+2)>0$, כלומר $16Y^2-16Y-32=16(Y-2)(Y+1)>0$, וזה קורה כאשר $Y<-1$ או $Y>2$. החיתוך של הקבוצה הזו עם הקטע $[0,5]$ הוא הקטע $[2,5]$, ולכן הסיכוי שישנם שני פתרונות ממשיים הוא $\frac{5-2}{5-0}=\frac{3}{5}$.

ב). למשוואה שני פתרונות ממשיים אם $b^2-4c\geq0$. מכאן שההסתברות המבוקשת היא $P\left(b^2-4c\geq0\right)=P\left(c\leq b^2/4\right)$. נעזר בשרטוט התחומים של *b,c*:



ההסתברות המבוקשת היא השטח המלא:

$$P\left(c\leq b^2/4\right)=\int_0^1\frac{b^2}{4}db=\frac{b^3}{12}\Big|_0^1=\frac{1}{12}$$

2) יהי X משתנה מעריכי עם הפרמטר $\lambda = 1$ בתחום $x > 0$.

חשב את פונקציית הצפיפות של משתנה Y המוגדר לפי $Y = \ln(X)$.

פתרון:

$F_X(x) = 1 - e^{-x}$.

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\ln X \le y) = P(X \le e^y) = F_X(e^y) = 1 - e^{-e^y}$$

לכן $\left(-\infty < y < \infty\right)$ $\quad f_Y(y) = F_X{}'(y) = -e^{-e^y}(-e^y) = e^{y-e^y}$.

3) הצפיפות המשותפת של המ"מ X, Y היא: $\left(0 < x < 1,\ 0 < y < 1\right)$ $\quad f(x,y) = \frac{6}{7}(x+y)^2$

א. חשב את הצפיפויות השוליות של X ו-Y.

ב. חשב את $Cov(X,Y)$.

פתרון:

א). נחשב את הצפיפות השולית של X ובעזרתה את התוחלת:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{6}{7}(x+y)^2 dy = \frac{2}{7} + \frac{6}{7}x + \frac{6}{7}x^2$$

באותו אופן לגבי Y (אפשר לראות שמטעמי סימטריות הצפיפות שווה):

$$f(y) = \int_0^1 \frac{6}{7}(x+y)^2 dx = \frac{2}{7} + \frac{6}{7}y + \frac{6}{7}y^2$$

ב). השונות המשותפת $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$:

נעזר בצפיפויות השוליות שחושבו בסעיף א'.

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot \left(\frac{2}{7} + \frac{6}{7}x + \frac{6}{7}x^2\right) dx = \frac{9}{14}$$

באותו אופן לגבי Y (אפשר לראות שמטעמי סימטריות התוחלת שווה):

$$E(Y) = \int_0^1 y \cdot \left(\frac{2}{7} + \frac{6}{7}y + \frac{6}{7}y^2\right) dy = \frac{9}{14}$$

$$E(XY) = \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1} (x \cdot y) \cdot \frac{6}{7}(x+y)^2 dx dy = \frac{17}{42}$$

נציב הכל בנוסחה לקוואריאנס: $Cov(X,Y)=\frac{17}{42}-\frac{9}{14}\cdot\frac{9}{14}=\frac{-5}{588}$

4) נתון $X\sim Poisson(\lambda)$.

א. חשב את הפונ' יוצרת המומנטים של X.

ב. נתון: $X_1\sim Poisson(\lambda_1), X_2\sim Poisson(\lambda_2), X_3\sim Poisson(\lambda_3)$.

X_1, X_2, X_3 ב"ת. מצא את התפלגות המ"מ $Y=X_1+X_2+X_3$.

פתרון:

א). $$M_X(t)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(e^t\lambda\right)^x}{x!}=e^{-\lambda}\cdot e^{e^t\lambda}=e^{\lambda\left(e^t-1\right)}$$

ב). ננצל את אי-התלות של המ"מ. בעזרת הפי"מ שמצאנו בסעיף א':

$$M_Y(t)=M_{X_1+X_2+X_3}(t)=M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)M_{X_3}(t)$$
$$=e^{\lambda_1\left(e^t-1\right)}\cdot e^{\lambda_2\left(e^t-1\right)}\cdot e^{\lambda_3\left(e^t-1\right)}=e^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\left(e^t-1\right)}$$

וזוהי פי"מ של התפלגות פואסון עם הפרמטר $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$,

לכן $Y\sim Poisson(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$.

5) נסמן $W=E(X\mid Y)$ ו- $T=E(W\mid X)$. הוכח ש- $V(T)\le V(X)$.

פתרון:

נשתמש בנוסחת פירוק השונות

$$V(X)=V\left[E(X\mid Y)\right]+E\left[V(X)\mid Y\right]\ge V\left[E(X\mid Y)\right]=V(W)$$

נשתמש שוב בנוסחת פירוק השונות

$$V(W)=V\left[E(W\mid X)\right]+E\left[V(W)\mid X\right]\ge V\left[E(W\mid X)\right]=V(T)$$

מש"ל.