תרגול 12 – אינפי 1

תרגיל

הוכיחו שאם $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ ואם הפונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}$ אזי היא מקבלת כל ערך ממשי.

פתרון

יהי $a\in\mathbb{R}$ ונראה שקיים $x_0\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(x_0)=a$. מכיוון ש- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ לכל $M\in\mathbb{R}$ ובפרט עבור $M=a$ קיים $x_1\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(x_1)<a$. מכיוון ש- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ לכל $N\in\mathbb{R}$ ובפרט עבור $N=a$ קיים $x_2\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(x_2)>a$. נתבונן בקטע הסגור $[x_1,x_2]$. הפונקציה מקיימת את תנאי משפט ערך הביניים בקטע, מתקיים $f(x_1)<a<f(x_2)$ ולכן קיים $x_0\in[x_1,x_2]$ עבורו $f(x_0)=a$.

מש"ל

תרגיל

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0,\infty)$ כך שמתקיים $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$. הוכיחו כי f מקבלת או מינימום או מקסימום (ז"א, לפחות אחד מהם).

פתרון

ברור שאם $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ אז $f(x)$ לא מקבלת מקסימום גלובלי ב $[0,\infty)$ (מדוע?). נוכיח שבתנאי השאלה f מקבלת מינימום. f רציפה ב $[0,\infty)$ לכן בפרט קיים $L\in\mathbb{R}$ כך ש $f(0)=L$. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ לכן קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים $f(x)>L$. f רציפה ב- $[0,\infty)$ ולכן רציפה ב-$[0,M]$. לכן ממשפט ווירשטראס היא מקבלת מינימום ב- $[0,M]$. כלומר, קיימים $m\in\mathbb{R}$ ו- $x_0\in[0,M]$ כך ש-$\forall x\in[0,M]\quad f(x_0)=m\le f(x)$. בפרט $f(0)=L\ge m$. אבל לכל $x>M$ מתקיים $f(x)>L$ ולכן לכל $x>M$ מתקיים $f(x)>m$. נקבל בסך הכל שלכל $x\in[0,\infty): f(x)\ge m=f(x_0)$. לכן מינימום מתקבל ב-$x_0$.

מש"ל

נגזרות

<u>הגדרה</u>

תהי f פונקציה ממשית המוגדרת בסביבה מלאה של x_0. הנגזרת של f בנקודה x_0 היא הגבול $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ בתנאי שהוא קיים וסופי.

הגדרה שקולה: $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

<u>הערה</u>: גזירות בנקודה גוררת רציפות בנקודה ולא להיפך!

<u>תרגיל</u>

ציינו לאילו ערכי x הנגזרת קיימת, וחשבו את ערכי הנגזרת שם עבור הפונקציה: $f(x)=|x|\cdot|5-x|$.

<u>פתרון</u>

למעשה הפונקציה שלנו היא: $f(x)=\begin{cases} x^2-5x & x\le 0 \\ 5x-x^2 & 0\le x\le 5 \\ x^2-5x & 5\le x\end{cases}$. מתקיים: $\forall x<0: f'(x)=2x-5;\ \forall x>5: f'(x)=2x-5;\ \forall 0<x<5: f'(x)=5-2x$. נבדוק גזירות בנקודה $x=0$: $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{5h-h^2-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}(5-h)=5$, $\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2-5h}{h}=\lim_{h\to 0^-}(h-5)=-5$. לכן הפונקציה אינה גזירה ב-0.

באותו האופן היא אינה גזירה בנקודה 5.

(שימו לב, עם זאת, שהיא רציפה בכל נקודה).

מש"ל

<u>תרגיל</u>

חשבו את הנגזרת של הפונקציה $f(x)=x^{\sin x}$.

<u>פתרון</u>

$f'(x)=\left(x^{\sin x}\right)'=\left(e^{\sin x\ln x}\right)'=e^{\sin x\ln x}\cdot\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

תהי f מוגדרת בסביבת 0 אך לא בנקודה 0 עצמה. נניח שהגבול $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ קיים ושווה ל- L. הוכיחו:

א. אי-הרציפות באפס היא סליקה.
ב. הפונקציה המתקבלת מ- f על ידי סילוק אי הרציפות באפס, היא פונקציה גזירה באפס. חשבו את נגזרתה שם.

<u>פתרון</u>

א. $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=\lim_{x\to 0}Lx=0$.

ב. לאחר סילוק נקודת אי הרציפות נקבל את הפונקציה הבאה:

$g(x)=\begin{cases} f(x) & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$. מתקיים:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=L.$$

מש"ל

<u>משפט</u> – נגזרת של פונקציה הפוכה

תהי $y=f(x)$ פונקציה הפיכה ורציפה בסביבת הנקודה x_0. אם $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 ואם $f'(x_0)\neq 0$ אזי גם הפונקציה ההפוכה שלה $x=f^{-1}(y)$ גזירה בנקודה $y_0=f(x_0)$ ומתקיים $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$.

<u>דוגמא</u>

נגזור את הפונקציה $g(y)=\arcsin y$. מתקיים:

$$\arcsin'(y_0)\underset{\sin(x_0)=y_0}{=}\frac{1}{\sin'(x_0)}=\frac{1}{\cos(x_0)}\underset{*}{=}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x_0)}}=\frac{1}{\sqrt{1-y_0^{\,2}}}$$

. הסבר ל-*:

$\sin x:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\xrightarrow{1-1,\,onto}[-1,1]$, ובתחום $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ה- $\cos$ חיובי.

מש"ל

<u>משפט Rolle</u>

תהי $f\in D(a,b)\cap C[a,b]$. אם $f(a)=f(b)$ אזי קיימת נקודה $x_0\in(a,b)$ כך ש- $f'(x_0)=0$.

<u>תרגיל</u>

הוכיחו כי למשוואה $x-\frac{1}{2}\sin x=3$ יש פתרון יחיד.

<u>פתרון</u>

נגדיר פונקציה $f(x)=x-\frac{1}{2}\sin x-3$. זוהי פונקציה רציפה וגזירה לכל x. מתקיים $f(0)<0$ וכן $f(5)=5-\frac{1}{2}\sin 5-3>0$. ממשפט ערך הביניים נובע שקיימת נקודה $x_0\in(0,5)$ עבורה $f(x_0)=0$. כלומר למשוואה שלנו יש לפחות פתרון אחד. על מנת להוכיח שזהו הפתרון היחיד, נניח בשלילה שקיים פתרון נוסף $x_1\neq x_0$. נניח בה"כ כי $x_0<x_1$ ונתבונן בקטע $[x_0,x_1]$. מתקיים $f(x)\in D(x_0,x_1)\bigcap C[x_0,x_1]$ (נובע מהגזירות של הפונקציה בכל $\mathbb{R}$), ולכן מתקיימים תנאי משפט רול.
כלומר, קיימת נקודה $a\in(x_0,x_1)$ כך ש- $f'(a)=0$. עם זאת,
$f'(x)=1-\frac{1}{2}\cos(x)>0$ בסתירה לכך שהנגזרת מתאפסת. לכן x_0 הנו הפתרון היחיד של המשוואה.

מש"ל

<u>משפט</u> – הערך הממוצע של Lagrange

תהי $f(x)\in D(a,b)\bigcap C[a,b]$. אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

<u>תרגיל</u> (ממבחן)

השתמשו במשפט הערך הממוצע על מנת להוכיח כי $\cos x<\frac{\sin x}{x}$ בקטע $(0,\pi)$.

<u>פתרון</u>

יהי $x\in(0,\pi)$ ונתבונן בפונקציה $f(t)=\sin t$ בקטע $(0,x)$. מכיוון ש- $f(t)\in D(0,x)\bigcap C[0,x]$, לפי משפט לגרנג' קיימת נקודה $c\in(0,x)$ עבורה $f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. כלומר, $\cos(c)=\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=\frac{\sin x}{x}$. כעת, $0<c<x<\pi$; בתחום $(0,\pi)$ הפונקציה $\cos$ היא יורדת ולכן $\cos x<\cos c$ ולבסוף $\cos x<\frac{\sin x}{x}$.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

הוכיחו על פי משפט לגרנג': $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{15}<\arcsin(0.6)<\frac{\pi}{6}+\frac{1}{8}$.

<u>פתרון</u>

תהי $f(x)=\arcsin(x)$. נשים לב ש-$\arcsin(0.5)=\frac{\pi}{6}$. הפונקציה $f(x)$ מקיימת את תנאי משפט הערך הממוצע של לגרנג' בקטע $[0.5,0.6]$ ולכן קיימת נקודה $x_0\in(0.5,0.6)$ עבורה $\arcsin'(x_0)=\frac{\arcsin 0.6-\arcsin 0.5}{0.1}$. כלומר $\frac{\arcsin 0.6-\frac{\pi}{6}}{0.1}=\frac{1}{\sqrt{1-x_0{}^2}}$. עלינו להראות ש- $\frac{\sqrt{3}}{15}<\frac{0.1}{\sqrt{1-x_0{}^2}}<\frac{1}{8}$. ואכן מתקיים $\frac{\sqrt{3}}{15}=\frac{0.1}{\sqrt{1-0.5^2}}<\arcsin(0.6)<\frac{0.1}{\sqrt{1-0.6^2}}=\frac{1}{8}$.

מש"ל

<u>משפט</u> – הערך הממוצע (המוכלל) של Cauchy

יהיו $f(x),g(x)\in D(a,b)\cap C[a,b]$ כך שמתקיים $g'(x)\neq 0$ לכל $a<x<b$. אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ עבורה $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

<u>תרגיל</u>

הוכיחו שלכל $x,y\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ מתקיים $|\tan x-\tan y|\leq 8\cdot|\sin x-\sin y|$.

<u>פתרון</u>

נגדיר שתי פונקציות $f(t)=\tan(t),\ g(t)=\sin(t)$. פונקציות אלה מקיימות את תנאי משפט קושי הנ"ל בקטע $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ (שכן הן רציפות וגזירות שם, וכן מתקיים $g'(t)=\cos(t)\neq 0$ לכל $t\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$). יהיו $x,y\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ ונניח בה"כ כי $x<y$ (ניתן לעשות זאת בגלל הערך המוחלט, וכן עבור $x=y$ הטענה ברורה). מתקיימים תנאי קושי גם עבור הקטע $[x,y]$. לכן קיימת נקודה $c\in(x,y)$ כך ש-

$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$. כלומר, $\frac{|\tan x-\tan y|}{|\sin x-\sin y|}=\left|\frac{\frac{1}{\cos^2 c}}{\cos c}\right|=\left|\frac{1}{\cos^3 c}\right|=\frac{1}{\cos^3 c}$. בקטע $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ הפונקציה $\cos^3(t)$ היא פונקציה יורדת ולכן $\frac{1}{\cos^3(t)}$ היא עולה ומתקיים $\frac{1}{\cos^3 c}<\frac{1}{\cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right)}=8$. מכאן נקבל הדרוש.

מש"ל