תרגול מס' 2 בחשבון אינפי 2

אינטגרציה בחלקים.

ידוע מתוך נגזרת מכפלת פונקציות $u(x),v(x)$ כי: $uv'=(uv)'-u'v \quad \Rightarrow \quad (uv)'=u'v+uv'$.

יחד עם תכונת הליניאריות של האינטגרל הלא מסוים נקבל את הכלל: $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$

(הקבוע C יופיע בשני האגפים).

דוגמאות:

1. $u=\ln x \to u'=\frac{1}{x}$, $v=\frac{x^4}{4} \to v'=x^3$ $\quad I=\int \underbrace{x^3\ln x}_{uv'}dx$ לכן: $I=\frac{x^4}{4}\ln x-\int\frac{x^3}{4}dx=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}+C$

----

2. $I=\int\arcsin(x)dx$:

$$u=\arcsin x \to u'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$v=x \to v'=1$$

לכן: $I=x\arcsin(x)-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+C$

----

3. $I=\int e^x\sin x\,dx$.

$$f=e^x \to f'=e^x \qquad g=\sin x \to g'=\cos x \qquad I=\int\underbrace{e^x\sin x}_{f'g}dx$$

$$v=e^x \to v'=e^x \qquad u=\cos x \to u'=-\sin x \qquad I=e^x\sin x-\underbrace{\int e^x\cos x\,dx}_{I_1}$$

$$I_1=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx=e^x\cos x+I \quad \Rightarrow \quad I=e^x\sin x-e^x\cos x-I$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$$

שיטת ההצבה.

משפט: תהא $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$ בקטע I ותהא $x=x(t)$ פונקציה גזירה והפיכה כך ש: $\operatorname{Im}(x(t))\subseteq I$. אזי: $\int f(x)dx=\int f(x(t))\cdot x'(t)dt=F(x(t))+C$.

(נובע מכלל השרשרת: $F'(x(t))=\frac{dF}{dx}(x(t))\cdot\frac{dx}{dt}(t)=f(x(t))\cdot x'(t)$).

דוגמאות:

1. $I=\int e^{\sqrt{x}}dx$.

$$x=t^2 \;\Rightarrow\; dx=2tdt \;\Rightarrow\; I=2\int te^t dt \qquad \begin{matrix} u=t \;\to\; u'=1 \\ v=e^t \;\to\; v'=e^t \end{matrix}$$

$$\Rightarrow\; I=2\left[te^t-\int e^t dt\right]=2\left[te^t-e^t\right]+C=2e^t(t-1)+C=2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C$$

---

2. $I=\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$. $e^x=t \;\to\; e^x dx=dt \;\Rightarrow\; I=\int\frac{dt}{1+t^2}=\arctan t+C=\arctan\left(e^x\right)+C$.

---

3. **עבור פונקציות מהצורה :** $n,m\in\mathbb{Z}$ $\sin^m x\cos^n x$:

אם m אי-זוגי נציב: $t=\cos x$ ונקבל: $dt=-\sin x\,dx \;\to\; dx=-\frac{dt}{\sin x}$, $\sin x=\sqrt{1-t^2}$

ולכן: $\int\sin^m x\cdot\cos^n x\cdot dx=-\int\sin^m x\cdot t^n\cdot\frac{dt}{\sin x}=-\int\sin^{m-1}x\cdot t^n dt=\int\left(1-t^2\right)^{\frac{m-1}{2}}t^n dt$

(אם m אי-זוגי אז בהכרח ש: $m-1$ זוגי ולכן ניתן לחלקו ב-2).

אם n אי-זוגי נציב: $t=\sin x$ ונקבל: $dt=\cos x\,dx \;\to\; dx=\frac{dt}{\cos x}$, $\cos x=\sqrt{1-t^2}$

ולכן: $\int\sin^m x\cdot\cos^n x\cdot dx=\int t^m\cos^n x\cdot\frac{dt}{\cos x}=\int t^m\cos^{n-1}x\cdot dt=\int t^m\left(1-t^2\right)^{\frac{n-1}{2}}dt$

אם גם m וגם n זוגיים – ההצבה הזאת לא תעזור.

דוגמא: $I=\int \sin^7 x\cdot\cos^4 x\,dx$

נציב: $t=\cos x$ ונקבל: $dt=-\sin x\,dx \;\rightarrow\; dx=-\dfrac{dt}{\sin x}$ ומכאן: $\sin x=\sqrt{1-t^2}$

$$I=-\int \sin^7 x\cdot t^4\,\frac{dt}{\sin x}=-\int \sin^6 x\cdot t^4 dt=-\int\left(1-t^2\right)^3 t^4 dt$$

אינטגרציה של פונקציות רציונאליות.

הגדרה: *פונקציה **רציונאלית*** היא שבר, שהמונה והמכנה שלו הם פולינומים. פונקציה רציונאלית ***הגונה*** היא פונקציה רציונאלית שבה דרגת הפולינום במונה קטנה ממש מדרגת הפולינום במכנה.

בהינתן אינטגרל לא מסוים של פונקציה רציונאלית, נחשב בשלבים הבאים:

1. נחלק את הפונקציה (באמצעות חילוק פולינומים) לפולינום ועוד פונקציה רציונאלית הגונה.
2. אשר לפונקציה ההגונה: את הפולינום במכנה נפרק למכפלת פולינומים אי-פריקים (לכל היותר מדרגה 2) עם החזקות המתאימות של כל אחד.
3. נחפש הצגה של הפונקציה ההגונה כסכום של שברים יסודיים באמצעות חישוב המקדמים המתאימים.
4. נבצע אינטגרציה על כל שבר יסודי בנפרד ונסכום יחד עם האינטגרל אל הפולינום מסעיף 1.

דוגמא: $I=\int\dfrac{x+1}{x^4+x^2}dx$.

פתרון: נחפש פירוק: $\dfrac{x+1}{x^2\left(x^2+1\right)}=\dfrac{A}{x^2}+\dfrac{B}{x}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$.

נחשב את המקדמים:

$$A\left(x^2+1\right)+Bx\left(x^2+1\right)+\left(Cx+D\right)x^2=x+1$$
$$Ax^2+A+Bx^3+Bx+Cx^3+Dx^2=x+1$$
$$\begin{cases} x^3:\; B+C=0\\ x^2:\; A+D=0\\ x:\quad B=1\\ 1:\quad A=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad A=B=1\,,\;C=D=-1$$

כלומר: $\dfrac{x+1}{x^2\left(x^2+1\right)}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{x+1}{x^2+1}$ ולכן: $I=\int\dfrac{dx}{x^2}+\int\dfrac{dx}{x}-\underbrace{\int\dfrac{x+1}{x^2+1}dx}_{I_1}=-\dfrac{1}{x}+\ln|x|-I_1$

$$I_1=\int\frac{x+1}{x^2+1}dx=\int\frac{x}{x^2+1}dx+\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\arctan x=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\arctan x+C$$

ובסה"כ: $I=-\frac{1}{x}+\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}-\arctan x+C$.

אם הפולינום במכנה אינו פריק ואין במונה נגזרת פנימית:

$$\int\frac{dx}{x^2+m^2}=\frac{1}{m^2}\int\frac{dx}{(x/m)^2+1}=\frac{1}{m}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{m}\arctan t+C=\frac{1}{m}\arctan\frac{x}{m}+C.$$

וגם השלמה לריבוע: $\int\frac{dx}{x^2+x+2}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C$.

דוגמה: חשב: $I=\int\frac{dx}{x^3+1}$.

ע"י ניחוש חכם של השורשים, ניתן לראות כי $x=-1$ הוא שורש.

לכן הפולינום x^3+1 מתחלק בגורם $(x+1)$. ע"י חילוק פולינומים נקבל: $\frac{x^3+1}{x+1}=x^2-x+1$.

כלומר: $\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{\left(x^2-x+1\right)(x+1)}$ כך שהגורמים במכנה אינם פריקים.

כעת נחפש קבועים A,B,C כך ש: $\frac{1}{x^3+1}=\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+\frac{C}{x+1}$.

ע"י פעולת מכנה משותף נקבל: $(Ax+B)(x+1)+C\left(x^2-x+1\right)=1$.

כלומר: $\begin{cases}A+C=0 & \Rightarrow\ A=-C\\ A+B-C=0 & \Rightarrow\ 1=3C\\ B+C=1 & \Rightarrow\ B=1-C\end{cases}$. הפתרון למערכת הזו הוא: $A=-\frac{1}{3},\ B=\frac{2}{3},\ C=\frac{1}{3}$

נקבל את הפירוק לשברים יסודיים: $\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)$.

נחשב את האינטגרל: $I=\frac{1}{3}\left(\ln|x+1|-\underbrace{\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx}_{I_1}\right)$

$$I_1=\frac{1}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\left(\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx-3\int\frac{dx}{x^2-x+1}\right)=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|-\frac{3}{2}\underbrace{\int\frac{dx}{x^2-x+1}}_{I_2}$$

$$I_2=\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{4}\right)+C$$

בסה"כ: $I=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{4}\right)+C$.

דוגמה: $I=\int\frac{dx}{(x+1)^{1/2}+(x+1)^{1/3}}$

הפעם ניקח את המכנה המשותף של השורשים כלומר נציב: $x+1=t^6$ ונקבל:

$(x+1)^{1/2}=t^3,\ (x+1)^{1/3}=t^2$ כמו כן: $dx=6t^5dt$ ולכן: $I=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}dt=6\int\frac{t^3}{t+1}dt$

וההמשך ידוע מאינטגרציה של פונקציות רציונליות.
