פתרון תרגיל 6

שאלה 1

א. חשב את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{tdt}{\cos t}}{\sin^2 x}$.

פתרון

מהמשפט היסודי נובע שהפונקציה $F(x)=\int_0^x \frac{tdt}{\cos t}$ גזירה לכל $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ וש $F'(x)=\frac{x}{\cos x}$

ולכן בפרט רציפה בקטע $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ (אכן, שימו לב שהאינטרגנד $\frac{tdt}{\cos t}$ הוא פונקציה רציפה בקטע

$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$). בשל הרציפות של $F(x)$ באפס מתקיים, $0=\int_0^0 \frac{tdt}{\cos t}=\lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{tdt}{\cos t}$. כמו כן,

$\lim_{x\to 0}\sin^2 x=0$. לכן ניתן להיעזר בכלל לופיטל (בגרסה של $\frac{0}{0}$) ולקבל

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{tdt}{\cos t}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\cos x}}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos^2 x}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ב. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בסביבת הנקודה a. חשב את הגבול $\lim_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt$.

פתרון

בדומה לסעיף א נקבל מהנתון ומהמשפט היסודי שהפונקציה $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

גזירה בסביבת הנקודה a ומתקיים $F'(x)=f(x)$. בפרט, $F'(a)=f(a)$.

$$f(a)=F'(a)=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=$$

לפי הגדרת הנגזרת נקבל ש

$$\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt-\int_a^a f(t)dt}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt}{x-a}$$

לכן $\lim_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt\cdot\lim_{x\to a}x=af(a)$.

שאלה 2

א. עבור איזה ערך של x לאינטגרל $\int_x^{x+3} t(5-t)\,dt$ יש ערך מקסימלי?

<u>פתרון</u>

תהי $f(t)=t(5-t)$. פונקציה זו רציפה ולכן נובע מהמשפט היסודי וכלל השרשרת שהפונקציה $F(x)=\int_x^{x+3} t(5-t)\ dt$ גזירה ומתקיים

$$F'(x)=(x+3)(5-(x+3))(x+3)'-x(5-x)x'=$$
$$(x+3)(2-x)-x(5-x)=2x-x^2+6-3x-5x+x^2=-4x+6$$

$F'(x)=0$ כאשר $x=1\frac{1}{2}$. ניתן לבדוק למשל לפי הנגזרת השניה שנקודה קריטית יחידה זו היא נקודת מקסימום. לכן התשובה היא $x=1\frac{1}{2}$.

ב. תהי $h(t)$ פונקציה בעלת נגזרת רציפה בקטע $[0,1]$ המקיימת $h(0)=0$ ו- $h(1)=3$. מצא את ערך האינטגרל $\int_0^1 \frac{h'(t)}{1+h(t)}dt$.

<u>פתרון</u>

נבצע החלפת משתנה $u=h(t)$ ונקבל

$$\int_0^1 \frac{h'(t)}{1+h(t)}dt=\int_{h(0)}^{h(1)}\frac{du}{1+u}=\int_1^3\frac{du}{1+u}=\ln(1+u)\Big|_1^3=\ln 4-\ln 2=\ln 2$$

<u>שאלה 3</u>

חשב את אורך העקום:

א. $y=x^{\frac{3}{2}}$ מ- $x=0$ ל- $x=5$.

<u>פתרון</u>

$y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$ ולכן

$$L=\int_0^5\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}dx=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^5=\frac{8}{27}\cdot\frac{343}{8}=\frac{343}{27}$$

ב. $f(x)=\ln(x)$ בין $x=1$ ל- $x=2$.

<u>פתרון</u>

$$L=\int_1^2\sqrt{1+(f'(x))^2}dx=\int_1^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx=\int_1^2\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx\ .$$

נמצא את האינטגרל הלא מסוים $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$. ניעזר בהצבה $t=\sqrt{x^2+1}$ ונקבל $dt=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$. מתקיים $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx=\int \frac{(x^2+1)x}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx=\int \frac{t^2}{t^2-1}dt=\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt$

ע"י שיטה של שברים חלקיים (עבור פונקציה רציונלית) ניתן להראות ש $\frac{1}{t^2-1}=\frac{1}{(t+1)(t-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)$ ולכן

$$\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+C .$$

מכאן, עפ"י ניוטון לייבניץ

$$L=\left(\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|\right)\Bigg|_1^2=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|$$

שאלה 4

מצא את הנקודה c שעבורה $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$ כאשר:

א. $f(x)=1$ ב. $f(x)=x$ ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

פתרון

א. $b-a=\int_a^b 1dx=f(c)(b-a)$ אם"ם $f(c)=1$. מכיון ש $f(x)=1$ קבועה אז כל $c\in[a,b]$ מקיימת הדרוש.

ב. $\int_a^b xdx=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}=(b-a)\frac{a+b}{2}=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. לכן הנקודה הדרושה היא $c=\frac{a+b}{2}$.

ג. $\int_a^b \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{b-a}{ab}=(b-a)f(\sqrt{ab})$. לכן הנקודה הדרושה היא $c=\sqrt{ab}$.

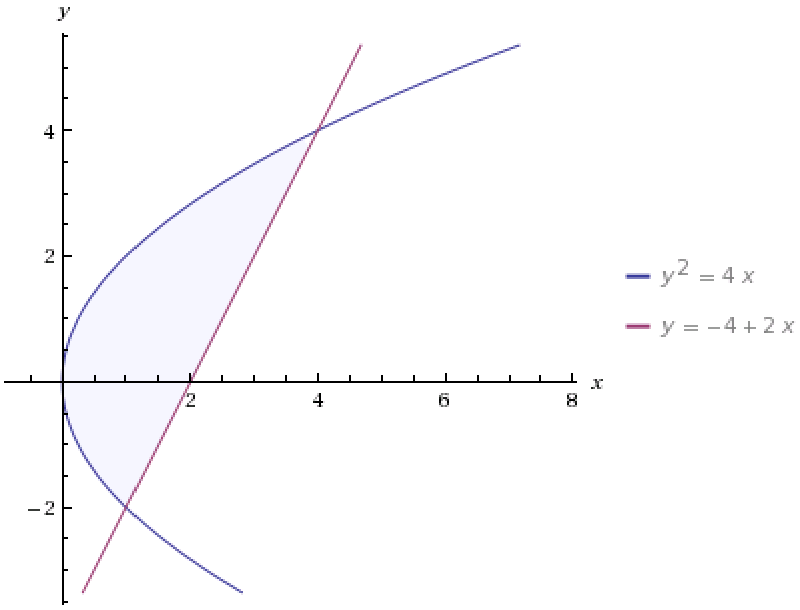
.

שאלה 5

א. חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2=4x$ והישר $y=2x-4$.

פתרון

נקודות החיתוך של הפרבולה והישר הן $(1,-2),(4,4)$.



קל לראות שבין נקודות החיתוך הישר מימין לפרבולה כלומר לכל $-2 \le y \le 4$ ערך האיקס של הישר גדול מערך האיקס של הפרבולה. נבצע שינוי נושא נוסחה ונקבל שמשוואת הישר היא $x=\frac{y+4}{2}$ ומשוואת הפרבולה היא $x=\frac{y^2}{4}$. לכן השטח המבוקש הוא $\int_{-2}^{4}\left(-\frac{y^2}{4}+\frac{4+y}{2}\right)dy=9$.

שימו לב: אפשר גם לחשב את השטח כסכום של שני השטחים הבאים: 1. השטח הכלוא בין הפונקציות $y=\sqrt{4x}$ ו- $y=-\sqrt{4x}$ בין אפס (את הנקודה אפס מקבלים מהעובדה שהפרבולה $y^2=4x$ מוגדרת רק החל מ $x=0$) לאחת כלומר $\int_0^1\left(\sqrt{4x}-(-\sqrt{4x})\right)dx$

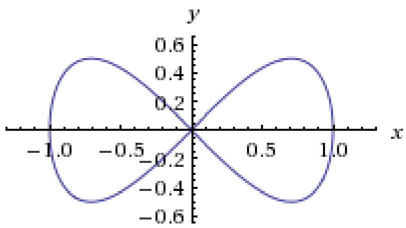
2. השטח הכלוא בין הפונקציות $y=\sqrt{4x}$ ו- $y=2x-4$ בין אחת לארבע כלומר $\int_1^4\left(\sqrt{4x}-2x+4\right)dx$

בדקו שגם $\int_0^1\left(\sqrt{4x}-(-\sqrt{4x})\right)dx+\int_1^4\left(\sqrt{4x}-2x+4\right)dx=9$.

ב. חשב את השטח הכלוא בעקומה $y^2=x^2-x^4$.

<u>פתרון</u>

נפשט מעט ונקבל $y^2=x^2-x^4=x^2(1-x^2)$ ולכן העקומה מוגדרת רק עבור $-1\le x\le 1$. כמו כן היא סימטרית ביחס לציר ה y (אם נחליף את איקס במינוס איקס נקבל את אותה המשוואה) וכן ביחס לציר האיקס
(החליפו את y ב $-y$).



לכן כדי לחשב את השטח המבוקש מספיק לחשב את השטח מתחת לעקומה ברביע הראשון ולהכפילו בארבע.

ברביע הראשון השטח המבוקש הוא זה שנמצא מתחת לפונקציה $y=\sqrt{x^2-x^4}$ ומעל ציר האיקס ובין הישרים $x=0$ ו- $x=1$. לכן שטח זה הוא:

$$\int_0^1 \sqrt{x^2-x^4}\,dx=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx \underset{t=x^2}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-t}\,dt=\left.\frac{-(1-t)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$$

. לכן בסה"כ השטח הכלוא בעקומה $y^2=x^2-x^4$ הוא $\frac{4}{3}$.