הרצאה XXI- מכניקה

תנע זוויתי :

נתחיל מההגדרה של תנע זוויתי עבור גופים נקודתיים. נגדיר : $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. זהו התנע הזוויתי, באנגלית : Angular Momentum.

כדי להבין את המושג ניקח כמה דוגמאות :

דוגמא 1 : תנועה מעגלית סטנדרטית, מהירות זוויתית קבועה ולכן מתקיים $\vec{v} = r\omega\hat{\theta}$. אם נחשב את התנע הזוויתי לפי הגדרה, נקבל $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} = mr^2\omega\hat{r} \times \hat{\theta} = mr^2\omega\hat{z}$.

דוגמא 2 : נניח גוף נקודתי שנע לאורך קו ישר המקביל לציר x. מתקיים $\vec{v} = v\hat{x}$, ולכן $\vec{r} = \sqrt{x^2+y^2}\hat{r}$. נציב הכל בנוסחה לתנע הזוויתי ונקבל $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\sqrt{x^2+y^2}\hat{r} \times v\hat{x} = mv\sqrt{x^2+y^2}\sin\theta\,\hat{z}$. וידוע כי מתקיים $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ לכן אם נציב זאת יחד עם הביטוי נקבל $\vec{L} = -mvy\hat{z}$.

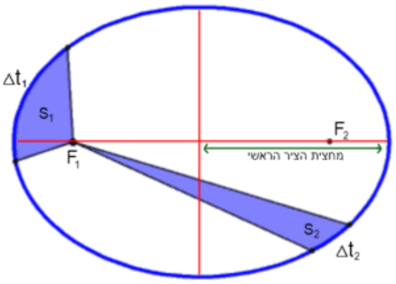
דוגמא 3 : מטוטלת שנעה בתנועה מעגלית, החוט באורך l, הרדיוס r, והמסה של החלקיק שבקצה המטוטלת היא m. המיקום של החלקיק נתון ע״י $\vec{R} = -lcos\alpha\hat{z} + lsin\alpha\hat{r}$. ולכן $\vec{v} = r\dot{\theta}\hat{\theta} = \omega l\sin\alpha\,\hat{\theta}$ וע״פ הגדרת התנע הזוויתי, נציב את כל מה שפיתחנו ונקבל $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = \omega \mathrm{ml}^2[-\cos\alpha\,\hat{z} + \sin\alpha\,\hat{r}] \times \sin\alpha\,\hat{\theta} = m\omega l^2\sin\alpha\,[\cos\alpha\,\hat{r} + \sin\alpha\,\hat{z}]$. נחשב את גודל הווקטור ע״י מכפלת הווקטור בעצמו, ונקבל $|\vec{L}| = \sqrt{|\vec{L}|^2} = \cdots = m\omega l^2\sin\alpha$.

השאלה המתבקשת היא, איך זה עוזר לנו בכלל?

נראה שמתקיים $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r} \times \vec{p}] = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_{\vec{v} \times m\vec{v} = 0} + \vec{r} \times \underbrace{\dot{\vec{p}}}_{F} = \vec{r} \times \vec{F}$, ונסמן $\tau = \vec{r} \times \vec{F}$. הוגים את τ ב״טורק״. או בעברית- מומנט סיבוב , או סתם מומנט.

נמצא מה הם היחידות לכל אחד מהמושגים החדשים : $[\vec{L}] = kg\frac{m^2}{s}, [\tau] = J$.

חוקי קפלר :



- חוק #1 של קפלר אומר שהכוכבים נעים במסלולים אליפטיים, כאשר השמש יושבת באחד המרכזים של האליפסה.
- חוק #2 של קפלר אומר שהקו שמחבר את כוכב הלכת עם השמש מכסה שטחים שווים במרווחי זמן שווים.
- חוק #3 של קפלר מדבר לגבי יחס בין זמן המחזור של כוכבי לכת והרדיוס הממוצע, כמובן סביב אותו מרכז. החוק הוא : $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$.

נוכיח את החוק השני :

מתקיים עבור כל פלנטה ופלנטה $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$, לכן מתקבל $\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\hat{z}$, אם נגזור לפי הזמן נקבל ש $\dot{\vec{L}} = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = mr\left(\underbrace{2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}}_{a_\theta = 0}\right) = 0$. אם נניח שכל צורה היא משולש(פרק זמן קטן אינפיניטיסמלית) , נקבל שהשטח הוא $s = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}|\Delta t$. ז״א $s = \frac{1}{2}\frac{|\vec{L}|}{m}\Delta t$. ומכיוון ש$\vec{L}$ לא תלוי בזמן, השטחים שווים בזמנים שווים.

ניתן להגיע לביטוי גם מתמטית : $S = \int_{t_i}^{t_f} ds = \int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\frac{|\vec{L}|}{m}dt = \frac{1}{2}\frac{|\vec{L}|}{m}\Delta t\,\Big|_{t_i}^{t_f} = \frac{1}{2}\frac{|\vec{L}|}{m}\Delta t$.

כמו כן מתקיים $\dot{\theta} = \frac{\vec{L}}{mr^2}$. ולכן האנרגיה הקינטית נתונה ע״י $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2\right] = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$. ולכן האנרגיה הכוללת היא $E_T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} + U(r)}_{U_{eff}(r)}$.

ובדרך אחרת: $0 = \dot{r}\left(-\frac{L^2}{mr^3} - f(r)\right) + m\dot{r}\ddot{r} = \dot{E_T}$ ז"א $m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} + f(r)$. וזה נכון כי $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r)$ תמיד, ע"פ חוקי ניוטון.

מתקיים: $U(r) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{k}{r}$. נמשיך בהרצאה הבאה את הניתוח..