תרגיל 4 פתור

9 במאי 2016

1. [1]הוכח שחיבור מטריצה הוא אסוציאטיבית כלומר $(A+B)+C = A+(B+C)$עבור מטריצות מאותו גודל.

פתרון:

$$\begin{aligned}[(A+B)+C]_{ij} &= (A+B)_{ij} + C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} + C_{ij} \\ &= A_{ij} + (B+C)_{ij} = [A+(B+C)]_{ij}\end{aligned} \quad \blacksquare$$

2. נתונות 2 מטריצות $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(א) מצא את $(AB)_{11}, (AB)_{13}, (AB)_{22}$

פתרון: $$(AB)_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 6$$

$$(AB)_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 2$$

$$(AB)_{22} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -1$$

(ב) בעזרת כפל עמודה עמודה הצג את העמודה הראשונה של AB כסכום משוקלל של עמודות A [2].

פתרון:

$$C_1(AB) = AC_1(B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ג) בעזרת כפל שורה שורה הצג את השורה השניה של ABכסכום משוקלל של שורות B.

פתרון:

---

[1] גם אם לא מצויין במפורש α תמיד מייצג סקלאר, A, Bמטריצות בכל התרגיל

[2] סכום משוקלל הוא $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n$ כאשר c_i עמודות מטריצה ו α_i סקאלרים

$$R_2(AB)=R_2(A)B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}+$$
$$(-1)\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\end{pmatrix}$$

(ד) בעזרת כפל עמודה שורה פרק את AB לסכום של 3 מטריצות מגודל 2×3 וחשב את התוצאה הסופית AB.

פתרון:

$$\begin{pmatrix}2&1&4\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}2&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&3&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

הגדרה: בהנתן מטריצה A. החזקה של A מוגדרת להיות $A^n:=\underbrace{AA\cdots A}_{n\,times}$

3. עבור $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ חשב את את העמודה הראשונה של A^4.

פתרון:

$$C_1(A^4)=C_1(A^3A)=A^3\cdot C_1(A)=A^3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=C_1(A^3)=$$
$$C_1(A^2A)=A^2\cdot C_1(A)=A^2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=C_1(A^2)=$$
$$C_1(AA)=A\cdot C_1(A)=A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=C_1(A)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

4. יהיו מטריצות: A בגודל 3×3 , B בגודל 5×4, Cבגודל 5×1 ; D בגודל 5×4 ו־ E בגודל 3×5 אלו מבין הפעולות הבאות מוגדרת? במידה והפעולה מוגדרת מה גודל המטריצה המתקבלת? (פתרון בסוגריים)

(א) BCB (לא מוגדר)

(ב) $B+D$ (לא מוגדר)

(ג) A^3E ($A^3E\in\mathbb{F}^{3\times 5}$)

(ד) $A(E+E)D$ ($A(E+E)D\in\mathbb{F}^{3\times 4}$)

(ה) ED ($ED\in\mathbb{F}^{3\times 4}$)

(ו) BC ($BC \in \mathbb{F}^{4\times 1}$)

5. יהיו
$$E_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

הבן מה נותנת המכפלה $E_1A,\ E_2A,\ E_3A$ עבור מטריצה A כלשהיא וע"י כך חשב את $E_1^{10},\ E_2^{10},\ E_3^{10}$.[3]

פתרון: (בעזרת כפל שורה־שורה)

הכפל ב E_1 משמאל שקול לפעולת שורה אלמנטרית של הוספת פעמיים שורה ראשונה לשורה השניה

$$E_1A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-&R_1(A)&-\\-&R_2(A)&-\\-&R_3(A)&-\\-&R_4(A)&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-&R_1(A)&-\\-&R_2(A)+2\cdot R_1(A)&-\\-&R_3(A)&-\\-&R_4(A)&-\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2+2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2+2+2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{10}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\10\cdot 2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\20&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

הכפל ב E_2 משמאל שקול לפעולת שורה אלמנטרית של הכפלת השורה השלישית ב־3

[3] מספיק תשובה סופית ונימוק־ ללא חישוב מפורש.

$$E_2A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-&R_1(A)&-\\-&R_2(A)&-\\-&R_3(A)&-\\-&R_4(A)&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-&R_1(A)&-\\-&R_2(A)&-\\-3\cdot&R_3(A)&-\\-&R_4(A)&-\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3^2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3^3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{10}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3^{10}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

הכפל ב E_3 משמאל שקול לפעולת שורה אלמנטרית של החלפת שורות 1 ו־3

$$E_3A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-&R_1(A)&-\\-&R_2(A)&-\\-&R_3(A)&-\\-&R_4(A)&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-&R_3(A)&-\\-&R_2(A)&-\\-&R_1(A)&-\\-&R_4(A)&-\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=I_4$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{10}=\left[\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^2\right]^5=I_4^5=I_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

בהצלחה!